3

Scritto di Fisica Matematica - terza parte
Corso di Laurea Triennale in Matematica - 15 giugno 2010

Attenzione: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito, anch'esso con cognome e nome e con il numero 3 messo in evidenza.

• Sia S il il quadrante positivo del piano $\mathbb{R}^2$: $q_1 > 0,\ q_2 > 0$. Si consideri in T^*S l'Hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{p_1^2}{q_1^2} + \frac{p_2^2}{q_2^2} + \sin\left(q_1^2 + q_2^2\right)$$

Verificare che la funzione

$$S(q,P) = \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} P_1 + q_1^2 P_2$$

è una funzione generatrice (di quale tipo?) di una trasformazione canonica indip. dal tempo, univalente, $(q,p) \mapsto (Q,P)$ di T^*S in sè.

–Dedurre tale tr. canonica in dettaglio, nella forma $q = q(Q,P), p = p(Q,P)$.

–Mediante quest'ultime, scrivere l'Hamiltoniana trasformata $K(Q,P)$ dell'assegnata sopra scritta H e scrivere in dettaglio il sistema canonico delle equazioni di Hamilton: $\dot{Q}_1 = \ldots.$
La nuova Hamiltoniana K è un integrale primo? ce ne sono altri?

–Individuare una matrice 2×2 simmetrica a elementi costanti non singolare A per cui tale K si scrive nella forma

$$K = \frac{1}{2} P^T A P + f(Q) \qquad \text{dove } \ P := \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

–Scrivere una Lagrangiana $L = L(Q, \dot{Q})$ da cui K è ottenuta mediante trasformazione di Legendre.

• Enunciare e dimostrare il teorema di Nöther.

Traccia della soluzione. Si scrive la trasformazione generata dalla "F_2" $S(q,P)$:

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad i = 1,2,$$

si raddrizza:

$$q_1 = \sqrt{2Q_1 - Q_2}, \quad q_2 = \sqrt{Q_2}, \quad p_1 = \sqrt{2Q_1 - Q_2}(P_1 + 2P_2), \quad p_2 = \sqrt{Q_2} P_1$$

da cui

$$K(Q,P) = (P_1 + 2P_2)^2 + P_1^2 + \sin(2Q_1) = \frac{1}{2} P^T A P + \sin(2Q_1) \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

che è generata dalla Lagrangiana

$$L(Q,\dot{Q}) = \frac{1}{2} \dot{Q}^T A^{-1} \dot{Q} - \sin(2Q_1), \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$