

Soluzione Parte 1 (Fis. Mat. 20/7/2019)

Esercizio 2

a. Equilibri di $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ sono $(\bar{x}, 0)$ con $f(\bar{x}, 0) = 0$.

Dunque: $(1, 0)$, $(-1, 0)$

b. $E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x)$ con $V(x) = \frac{x^3}{3} - x$



E funzione di Lyapunov:

$$E'(x, \dot{x}) = \begin{pmatrix} x^2 - 1 \\ \dot{x} \end{pmatrix} \Rightarrow E'(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E''(x, \dot{x}) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E''(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e' def. pos.}$$

Dunque E ha min. stretta in $(1, 0)$

Derivata di Lie:

$$\begin{aligned} \dot{E}(x, \dot{x}) &= \dot{x} \ddot{x} + (x^2 - 1) \dot{x} = \dot{x} (\ddot{x} + x^2 - 1) = -2h \dot{x}^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ si conclude che c'è stabilità semplice.

c. Matrice della lin di $X(x, \dot{x}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ -x^2 + 1 - 2h\dot{x} \end{pmatrix}$ e

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2x & -2h \end{pmatrix}. \text{ In } (1, 0) \text{ vale } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2h \end{pmatrix} \text{ e ha}$$

autovalori $-h \pm \sqrt{h^2 - 2}$. Con:

$0 < h < \sqrt{2}$: 2 autovalori complessi con $\text{Re} < 0 \Rightarrow \text{stab. as.}$

$h = \sqrt{2}$: autovalore doppio $-\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \text{stab. as.}$

$h > \sqrt{2}$: 2 autovalori reali negativi $\Rightarrow \text{stab. as.}$

d. ε' un fuoco stabile:

