2 **cognome e nome:..................**

Scritto di Fisica Matematica - seconda parte -
Corso di Laurea Triennale in Matematica - 20 luglio 2010
sottolineare: **[vecchio ordinamento 509]** **[nuovo ordinamento 270]**

Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito, anch'esso con cognome e nome e con il numero 2 messo in evidenza.

• Sia dato il riferimento cartesiano $Oxyz$ associato ad uno spazio inerziale, x verticale discendente[1]. La sbarretta OA, di massa trascurabile e lunghezza a, ha nell'estremo A uno snodo a cerniera al quale è incernierato il sistema articolato (è un triangolo isoscele) ABC, composto dalle due sbarrette AB e AC, di massa trascurabile e lunghezza b, e dalla sbarretta BC, di massa m e lunghezza 2ℓ. Si indichi con G il baricentro di BC. Riassumendo:

$$|OA| = a \qquad |BC| = 2\ell \qquad |AB| = |AC| = b \qquad (b > \ell)$$

Il sistema è vincolato a stare nel piano Oxy. Tutti i vincoli sono supposti lisci. Si introducano gli angoli (con orientamento anti-orario rispetto al semi-spazio z_+): $\theta = (Ox, OA)$, $\varphi = (Ox, AG)$.

(i) Scrivere la funzione energia cinetica T e la funzione energia potenziale V.

(ii) Nell'ipotesi

$$\ell = a\sqrt{3}, \qquad b = 2a,$$

determinare le pulsazioni di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile.

Se servisse, si usi $d^2 = b^2 - \ell^2$ per denotare il quadrato della distenza di G da A.

• Illustrare il metodo dei Moltiplicatori di Lagrange per la determinazione delle reazioni vincolari per i sistemi di n particelle vincolate in maniera olonoma ($f(OP) = 0,\ f : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^k$) e liscia.

Soluzione.

$$V = -mgx_G$$

$$OG : \quad \begin{cases} x &= a\cos\theta + d\cos\phi \\ y &= a\sin\theta + d\sin\phi \end{cases}$$

$$\mathbf{v}_G : \quad \begin{cases} \dot{x} &= -a\sin\theta\dot{\theta} - d\sin\phi\dot{\phi} \\ \dot{y} &= a\cos\theta\dot{\theta} + d\cos\phi\dot{\phi} \end{cases}$$

$$V(\theta, \phi) = -mg(a\cos\theta + d\cos\phi)$$

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_G|^2 + \frac{1}{2}(\frac{m(2\ell)^2}{12})\dot{\phi}^2 =$$

[1]far attenzione dunque al segno dell'energia pot. gravitazionale

$$= \frac{1}{2}m\left(a^2\dot\theta^2 + d^2\dot\phi^2 + 2ad\cos(\theta-\phi)\dot\theta\dot\phi\right) + \frac{m}{6}\ell^2\dot\phi^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\left[a^2\dot\theta^2 + 2ad\cos(\theta-\phi)\dot\theta\dot\phi + (d^2+\frac{\ell^2}{3})\dot\phi^2\right].$$

$$\begin{cases} 0 &= \frac{\partial V}{\partial\theta} = mga\sin\theta \\ 0 &= \frac{\partial V}{\partial\phi} = mgd\sin\phi \end{cases}$$

$$\ell = a\sqrt{3}, \qquad b = 2a,$$

$$d^2 = b^2 - \ell^2 = a^2 \Rightarrow d = a$$

$$\nabla^2 V(0,0) = \begin{pmatrix} mga & 0 \\ 0 & mga \end{pmatrix} \qquad def.\ pos.\ \Rightarrow \quad stabile$$

L'energia cinetica, con la nuova scelta dei parametri, vale:

$$T = \frac{1}{2}m\left[a^2\dot\theta^2 + 2a^2\cos(\theta-\phi)\dot\theta\dot\phi + 2a^2\dot\phi^2\right].$$

$$T^{(0)} = \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} ma^2 & ma^2 \\ ma^2 & 2ma^2 \end{pmatrix}}_{:=A}\begin{pmatrix}\dot\theta \\ \dot\phi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dot\theta \\ \dot\phi\end{pmatrix}$$

$$0 = \det(\nabla^2 V(0,0) - \omega^2 A)$$

$$0 = \det\begin{pmatrix} mga - \omega^2 ma^2 & -\omega^2 ma^2 \\ -\omega^2 ma^2 & mga - 2\omega^2 ma^2 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det\begin{pmatrix} \frac{g}{a} - \omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \frac{g}{a} - 2\omega^2 \end{pmatrix}$$

$$0 = (\frac{g}{a} - \omega^2)(\frac{g}{a} - 2\omega^2) - \omega^4$$

è una bi-quadratica:

$$\begin{cases} \omega_1^2 &= \frac{g}{a}\frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \omega_2^2 &= \frac{g}{a}\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$