3

cognome e nome: ....

Appello di Fisica Matematica 2 - Corso di Laurea Triennale in Matematica - 20 luglio 2010

Attenzione: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme ad un unico altro foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito, anch'esso con cognome e nome.

• Determinare l'integrale generale del moto associato all'Hamiltoniana

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{p_1 + e^{q_1}}{p_2 + 3e^{q_2}}.$$

Indicare con $q_i(0) = \bar{q}_i$, $p_i(0) = \bar{p}_i$ le condizioni iniziali.

• Dire se la trasformazioni di coordinate

$$\tilde{q} = \arctan \frac{\alpha q}{p}, \qquad \tilde{p} = \frac{1}{2}(\alpha q^2 + \frac{p^2}{\alpha})$$

è canonica. Si ricordi che $D[\arctan(x)] = 1/(1 + x^2)$.

• Relazione tra moti spontanei su varietà vincolari lisce e geodetiche nella metrica $g = \sqrt{T}$ ove T è l'energia cinetica

Soluzione esercizio 3.

L'Hamiltoniana è separabile, $H(q,p) = H_1(q_1,p_1)/H_2(q_2,p_2)$, quindi uso una funzione generatrice del tipo

$$S = -t\frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_2} + W_1(\tilde{p}_1, q_1) + W_2(\tilde{p}_2, q_2)$$

L'equazione di H-J si scinde in due equazioni di H-J

$$\frac{\partial W_1}{\partial q_1} + e^{q_1} = \tilde{p}_1, \qquad \frac{\partial W_2}{\partial q_2} + 3e^{q_2} = \tilde{p}_2.$$

che si integrano direttamente:

$$W_1(\tilde{p}_1, q_1) = \tilde{p}_1 q_1 + \int e^{q_1} dq_1, \qquad W_2(\tilde{p}_2, q_2) = \tilde{p}_2 q_2 + 3\int e^{q_2} dq_2.$$

Scriviamo la trasformazione canonica generata da S

$$\tilde{q}_1 = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_1} = -t\frac{1}{\tilde{p}_2} + q_1, \qquad \tilde{q}_2 = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_2} = \frac{t\ \tilde{p}_1}{\tilde{p}_2^2} + q_2$$

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1} = \tilde{p}_1 + e^{q_1}, \qquad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2} = \tilde{p}_2 + 3e^{q_2}$$

Imponenendo le condizioni iniziali si trova

$$\tilde{q}_i = \bar{q}_i, \quad i = 1,2 \quad \tilde{p}_1 = \bar{p}_1 - e^{\bar{q}_1}, \quad \tilde{p}_2 = \bar{p}_2 - 3e^{\bar{q}_2}$$

e infine

$$q_1(t) = \bar{q}_1 + \frac{t}{\bar{p}_1 - e^{\bar{q}_1}}, \qquad q_2(t) = \bar{q}_2 - \frac{t(\bar{p}_1 - e^{\bar{q}_1})}{\bar{p}_2 - 3e^{\bar{q}_2}}$$

$$p_1(t) = \bar{p}_1 + \exp\frac{t}{\bar{p}_1 - e^{\bar{q}_1}}, \quad p_2(t) = \bar{p}_2 + \exp\frac{-t(\bar{p}_1 - e^{\bar{q}_1})}{\bar{p}_2 - 3e^{\bar{q}_2}}$$

• La trasformazione è canonica se e solo se $\det J = 1$ ove

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} \\ \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{\alpha} & \alpha q \\ \beta(-\frac{\alpha q}{p^2}) & \beta\frac{\alpha}{p} \end{pmatrix}$$

e $\beta = 1/1 + (\frac{\alpha q}{p})^2$. A conti fatti la trasformazione risulta canonica.