

Scritto di Fisica Matematica - seconda parte -
 Corso di Laurea Triennale in Matematica - 22 settembre 2010
 sottolineare: [vecchio ordinamento 509] [nuovo ordinamento 270]

Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme ad un foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolta la (sola) soluzione dei problemi qui proposti, anch'esso con cognome e nome e con il numero **2** messo in evidenza.

Si consideri la terna $(Oxyz)$ associata ad uno spazio non inerziale rotante uniformemente attorno all'asse z rispetto agli spazi inerziali con velocità angolare di trascinamento $\underline{\Omega} = \Omega \hat{z}$. Una sbarra omogenea di lunghezza ℓ e massa m è vincolata a stare sul piano Oxz e con il baricentro G a scorrere sull'asse x ; entrambi i vincoli sono privi d'attrito. Si introducano le variabili lagrangiane (x, θ) , x : ascissa del baricentro, θ : angolo orientato in senso antiorario (rispetto al semi-spazio $y < 0$) dall'asse x alla sbarretta.

1) Determinare in dettaglio la funzione energia potenziale $\mathcal{U}^c(x, \theta)$ relativa alla forza centrifuga sulla sbarretta. E la forza di Coriolis?

2) Supposto poi che

i) z sia verticale ascendente: $\underline{g} = -g \hat{z}$, $g > 0$,

ii) una molla di costante elastica $h > 0$ sia tesa tra O e G ,

determinare equilibri, discuterne la stabilità per $h > m\Omega^2$, e calcolare le frequenze di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile.

Soluzione.

Definiamo un'ascissa s sulla sbarretta, con origine in G .

$$\mathcal{U}^c(x, \theta) = -\frac{\Omega^2}{2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \underbrace{\frac{m}{\ell}}_{\text{densità di massa}} (x + s \cos \theta)^2 ds,$$

$$\mathcal{U}^c(x, \theta) = -\frac{\Omega^2}{2} \frac{m}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} (x^2 + s^2 \cos^2 \theta + 2xs \cos \theta) ds,$$

$$\mathcal{U}^c(x, \theta) = -\frac{\Omega^2}{2} \frac{m}{\ell} \left[\ell x^2 + \frac{2\ell^3}{3 \cdot 8} \cos^2 \theta \right],$$

$$\mathcal{U}^c(x, \theta) = -\frac{\Omega^2}{2} m x^2 - \frac{\Omega^2}{2} \frac{m \ell^2}{12} \cos^2 \theta.$$

L'energia potenziale totale (per la gravità è una costante) è

$$\mathcal{U}(x, \theta) = \frac{h - m\Omega^2}{2} x^2 - \frac{\Omega^2}{2} \frac{m \ell^2}{12} \cos^2 \theta$$

L'azione delle forze di Coriolis è nulla: per ogni elemento $[s, s+ds]$ della sbarretta il lavoro è

$$dL_{ds}^{Coriolis} = -2 \frac{m}{\ell} ds \underline{\Omega} \wedge \underline{V}(s) \cdot dP(s) \equiv 0$$

perché i tre vettori: velocità angolare del sistema rotante, velocità dell'elemento $[s, s+ds]$ e spostamento generico consentito ad esso, sono sempre complanari.

Equilibri:

$$\begin{cases} 0 &= \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} &= (h - m\Omega^2)x \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} &= \frac{m\Omega^2 \ell^2}{12} \cos \theta \sin \theta \end{cases}$$

$(x_E, \theta_E) :$ $(0, 0), (0, \frac{\pi}{2}), (0, \pi), (0, \frac{3}{2}\pi)$. Per ovvi motivi di simmetria basterà studiare $(0, 0), (0, \frac{\pi}{2})$.

$$\nabla^2 \mathcal{U}(x, \theta) = \begin{pmatrix} h - m\Omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{m\Omega^2 \ell^2}{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 \mathcal{U}(0, 0) : \text{pos.def.} \Rightarrow \text{stabile} \quad \nabla^2 \mathcal{U}(0, \frac{\pi}{2}) : \text{non def.} \Rightarrow \text{instabile}$$

Energia cinetica: $T(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{m \ell^2}{12} \dot{\theta}^2$ La matrice cinetica a è esattamente la matrice diagonale $\text{diag}(m, \frac{m \ell^2}{12})$. Piccole oscillazioni attorno a $(0, 0)$:

$$0 = \det \begin{pmatrix} h - m\Omega^2 - m\omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{m \ell^2}{12} (\Omega^2 - \omega^2) \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{h - m\Omega^2}{m}} \quad \omega_2 = \Omega$$