3

cognome e nome: ....

Appello di Fisica Matematica 2 - Corso di Laurea Triennale in Matematica - 8 settembre 2010

Attenzione: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme ad un unico altro foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito, anch'esso con cognome e nome.

• Illustrare nel dettaglio il metodo di soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi nel caso di Hamiltoniana separabile

$$H(p, q) = f(H_1(p_1, q_1), \dots, H_n(p_n, q_n)).$$

• Determinare il moto del sistema di Hamiltoniana

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = p_1^2 e^{-q_1} + \frac{p_2^2}{2}, \qquad DomH = (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) \times \mathbb{R}^2$$

per fissate condizioni iniziali p_0, q_0 mediante integrazione della equazione di H-J associata.

Soluzione.

Metodo di integrazione dell'equazione di Hamilton-Jacobi per hamiltoniane separabili, ovvero

$$H(p,q) = f(H_1(p_1,q_1),\dots,H_n(p_n,q_n)), \qquad \frac{\partial H_i}{\partial p_i}(p_i,q_i) \neq 0, \quad \forall i.$$

Osserviamo preliminarmente che ogni funzione $H_i(p_i,q_i)$ è un integrale primo del moto. Infatti

$$\begin{aligned}\frac{dH_i}{dt} &= \sum_k \frac{\partial H_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial H_i}{\partial p_k}\dot{p}_k = \\ &= \sum_k \frac{\partial H_i}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial H_i}{\partial p_k}(-\frac{\partial H}{\partial q_k}) = \\ &= \sum_k \frac{\partial H_i}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial a_k}\frac{\partial H_i}{\partial p_k} - \frac{\partial H_i}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial a_k}\frac{\partial H_i}{\partial q_k} = 0.\end{aligned}$$

Scegliamo una funzione generatice del tipo

$$S(q,\tilde{p},t) = -f(\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_n)t + \sum_i W_i(q_i,\tilde{p}_i).$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi associata

$$H(q,\frac{\partial S}{\partial q}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

si scrive

$$f(H_1(q_1,\frac{\partial W_1}{\partial q_1}),\dots,H_n(q_n,\frac{\partial W_n}{\partial q_n})) = f(\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_n)$$

ed è soddisfatta se e solo se le W_i risolvono le n equazioni di $H-J$ separate

$$H_i(q_i,\frac{\partial W_i}{\partial q_i}(q_i,\tilde{p}_i)) = \tilde{p}_i, \qquad i=1,\dots,n;$$

per l'ipotesi $\partial H_i/\partial p_i \neq 0$, le n equazioni ammettono forma normale

$$\frac{\partial W_i}{\partial q_i} = \varphi(q_i,\tilde{p}_i), \qquad W_i(q_i,\tilde{p}_i) = \int_{q_i(0)}^{q_i} \varphi(\lambda,\tilde{p}_i)d\lambda.$$

Controlliamo che S sia un integrale completo di $H-J$ ovvero

$$rk(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial p_i}) = max = n$$

Si ha facilmente

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} = \varphi_i, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial p_i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tilde{p}_i} = Diag[\frac{\partial \varphi_i}{\partial \tilde{p}_i}].$$

Ma essendo

$$H_i(q_i,\varphi(q_i,\tilde{p}_i)) = \tilde{p}_i, \quad \forall i$$

si ha che $(\partial H_i/\partial p_i \neq 0)$

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \tilde{p}_i} = \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial \tilde{p}_i} = 1, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tilde{p}_i} \neq 0 \quad \forall i$$

e quindi il rango è massimo.

Esercizio. L'hamiltoniana è separabile con

$$H_1 = p_1^2 e^{-q_1}, \quad H_2 = p_2^2/2, \quad f(a_1, a_2) = a_1 + a_2$$

e la condizione $\partial H_i/\partial p_i$ è soddisfatta nel dominio dato. Introduco la funzione generatrice

$$S(q, \tilde{p}, t) = -(\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)t + W_1(q_1, \tilde{p}_1) + W_2(q_2, \tilde{p}_2)$$

e le equazioni di H-J associate

$$(\frac{\partial W_1}{\partial q_1})^2 e^{-q_1} = \tilde{p}_1, \qquad (\frac{\partial W_1}{\partial q_1})^2 = 2\tilde{p}_2.$$

Si ha quindi facilmente

$$S(q, \tilde{p}, t) = -(\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)t \pm \sqrt{\tilde{p}_1}e^{q_1} \pm \sqrt{2\tilde{p}_2}q_2$$

la trasformazione canonica si scrive

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\partial S}{\partial q_1} = \frac{\partial W_1}{\partial q_1} = \pm\sqrt{\tilde{p}_1}e^{q_1} \\
p_2 &= \frac{\partial S}{\partial q_2} = \frac{\partial W_2}{\partial q_2} = \pm\sqrt{2\tilde{p}_2} \\
\tilde{q}_1 &= \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_1} = -t \pm \frac{1}{2\sqrt{\tilde{p}_1}}e^{q_1} \\
\tilde{q}_2 &= \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_2} = -t \pm \frac{2}{2\sqrt{2\tilde{p}_2}}q_2
\end{aligned}$$