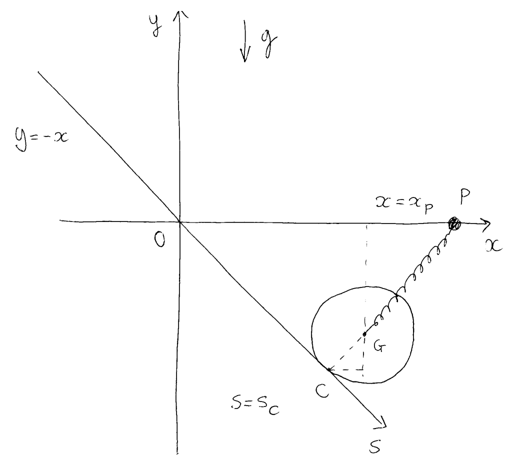
2 **cognome e nome**: ....

Appello di Fisica Matematica 2 - Corso di Laurea Triennale in Matematica - 8 settembre 2010

Attenzione: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme ad un unico altro foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito, anch'esso con cognome e nome.

• Nel piano Oxy, con y verticale ascendente, di un riferimento inerziale $Oxyz$ giace una guida rettilinea di equazione $y = -x$. Per determinare la posizione di un punto della retta si usi un'ascissa rettilinea sulla guida con origine in O e orientata positivamente concordemente alla direzione positiva dell'asse x. Nel piano Oxy si consideri il sistema composto da un punto materiale P di massa m vincolato in modo liscio a scorrere sull'asse x e da un disco omogeneo di massa M e raggio R vincolato in modo liscio sulla guida e soggetto al vincolo di *puro rotolamento*. Si usino come coordinate lagrangiane l'ascissa x del punto P, $x = x_P$, e l'ascissa s, $s = s_C$ del punto di contatto del disco sulla guida. Infine, tra il punto P e il baricentro G del disco è tesa una molla lineare di costante elastica $h > 0$.

1. Scrivere l'energia potenziale del sistema e determinare le configurazioni di equilibrio stabili sulla base dei teoremi visti nel corso
2. Determinare le frequenze di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile nell'ipotesi semplificativa $m = M$



• Mostrare che il vincolo cinematico (nonolonomo) di puro rotolamento di un disco su una guida rettilinea è un vincolo geometrico (olonomo).

Soluzione esercizio 2.

Sistema a sole forze conservative. Energia potenziale:

$$U(s,x) = U^g + U^{el} = -Mgs\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{h}{4}[(s-R)^2 + (\sqrt{2}x - s - R)^2]$$

Equilibri

$$\frac{\partial U}{\partial s} = -Mg\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{h}{2}[(s-R) - (\sqrt{2}x - s - R)] = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{h}{2}(\sqrt{2}x - s - R)\sqrt{2} = 0.$$

Unico equilibrio

$$s^* = R + \frac{Mg}{h}\sqrt{2}, \qquad x^* = \frac{Mg}{h} + \sqrt{2}R.$$

Stabilità con THND:

$$H_U(s^*, x^*) = H_U = \begin{pmatrix} h & -h\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -h\frac{\sqrt{2}}{2} & h \end{pmatrix}, \qquad \det H_U = \frac{h^2}{2} > 0, \quad \textit{stabile}.$$

Energia cinetica (uso il vincolo di puro rotolamento $\omega = \dot{s}/R$)

$$T = T_P + T_D = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}(\frac{\dot{s}}{R})^2, \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}M & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

Frequenze delle piccole oscillazioni

$$\det(H_U - \omega^2 A) = \det\begin{pmatrix} h - \frac{3}{2}M\omega^2 & -h\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -h\frac{\sqrt{2}}{2} & h - m\omega^2 \end{pmatrix} = 0.$$

nell'ipotesi $M = m$

$$3m^2\omega^4 - 5hm\omega^2 + h^2 = 0, \qquad \omega^2_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}\frac{h}{m}.$$