3

cognome e nome:..................

Scritto di Fisica Matematica - terza parte -
Corso di Laurea Triennale in Matematica - 8 settembre 2010

Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito, anch'esso con cognome e nome e con il numero 3 messo in evidenza.

• Si consideri in $\mathbb{R}^{2n}$ una funzione Hamiltoniana $H(q_1, p_1, \ldots, p_n)$ dove le variabili q_α, $\alpha = 2, \ldots, n$, sono cicliche, inoltre H è pure indipendente dal tempo.

Si supponga che $\frac{\partial H}{\partial p_1} \neq 0$.

Scrivere in dettaglio il metodo di integrazione di Hamilton-Jacobi per questa Hamiltoniana, nella ricerca di una opportuna funzione generatrice:

$$S(q_1, \ldots, q_n, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n, t)$$

•• Nel sistema $Oxyz$ si rappresenti una superficie di rotazione attorno all'asse z nel seguente modo. Consideriamo i parametri descriventi la superficie: $q_1 = \phi$, $q_2 = z$; e sia $r = r(q_2) \geq 0$ una assegnata funzione regolare; si consideri l'immersione:

$$x(q_1, q_2) = r(q_2) \cos q_1, \qquad y(q_1, q_2) = r(q_2) \sin q_1, \qquad z(q_1, q_2) = q_2$$

Un punto materiale di massa 1 sia vincolato senza attrito su di essa:

Si scriva la Lagrangiana $L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = T$, se ne deduca la formulazione Hamiltoniana del problema dinamico, e, utilizzando la risposta del precedente •, si imposti, più in dettaglio possibile, l'integrazione con il metodo di Hamilton-Jacobi.

Soluzione.

Si tratta di determinare una funzione generatrice $S(q_1,\dots,q_n,\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_n,t)$, di tipo F_2, in variabili miste e (necessariamente) dipendente dal tempo, che generi una trasformazione canonica che muta l'Hamiltoniana assegnata H nell'Hamiltoniana identicamente nulla $K \equiv 0$. La struttura dell'Hamiltoniana data, $H(q_1,p_1,\dots,p_n)$, dove tutte le variabili base sono cicliche tranne una, suggerisce di ricercare S nella seguente forma:

$$S(q_1,\dots,q_n,\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_n,t)=\sum_{\alpha=2}^{n}\tilde{p}_\alpha q_\alpha+W(q_1,\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_n)-\tilde{p}_1 t$$

Impostando per questa S proposta l'equazione di H-J, $\frac{\partial S}{\partial t}+H(q_1,\frac{\partial S}{\partial q})=0$, otteniamo:

$$H(q_1,\frac{\partial W}{\partial q_1},\tilde{p}_2,\dots,\tilde{p}_n)=\tilde{p}_1 \qquad (*)$$

Grazie all'ipotesi tecnica $\frac{\partial H}{\partial p_1}\neq 0$ possiamo esprimere:

$$\frac{\partial W}{\partial q_1}=\mathcal{F}(q_1,\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_n)$$

e dunque

$$W(q_1,\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_n)=\int^{q_1}\mathcal{F}(\lambda,\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_n)d\lambda$$

La trasformazione, in forma mista, generata da S è la seguente:

$$p_1=\frac{\partial S}{\partial q_1}:\quad p_1=\frac{\partial W}{\partial q_1}\qquad\qquad \tilde{q}_1=\frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_1}:\quad \tilde{q}_1=\frac{\partial W}{\partial \tilde{p}_1}-t$$

$$p_\alpha=\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}:\quad p_\alpha=\tilde{p}_\alpha\qquad\qquad \tilde{q}_\alpha=\frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_\alpha}:\quad \tilde{q}_\alpha=q_\alpha+\frac{\partial W}{\partial \tilde{p}_\alpha}$$

Infine ci chiediamo se la S così costruita sia effettivamente una 'buona' f. generatrice, cioè, dobbiamo verificare la condizione di 'raddrizzamento' della tr. canonica,

$$\frac{\partial^2 S}{q_i\partial\tilde{p}_j}\neq 0:$$

$$\frac{\partial^2 S}{q_i\partial\tilde{p}_j}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 W}{q_1\partial\tilde{p}_1} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 1\end{pmatrix},$$

dalla $(*)$ vediamo che

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial^2 W}{q_1\partial\tilde{p}_1}=1,$$

da cui la tesi.

La Lagrangiana delle geodetiche sulla superficie

$$x(\phi, z) = r(z)\cos\phi, \qquad y(\phi, z) = r(z)\sin\phi, \qquad z(\phi, z) = z$$

$$L(\phi, z, \dot{\phi}, \dot{z}) = T = \frac{1}{2}\left[\left(1 + r'^2(z)\right)\dot{z}^2 + r^2(z)\dot{\phi}^2\right],$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = r^2\dot{\phi}, \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \left(1 + r'^2(z)\right)\dot{z},$$

$$H(\phi, z, p_\phi, p_z) = \frac{1}{2}\left[\left(1 + r'^2(z)\right)^{-1} p_z^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2(z)}\right]$$

La variabile ϕ è ciclica e si procede seguendo le linee del caso generale sopra esposto.