2

Scritto di Fisica Matematica - prima parte -
Corso di Laurea Triennale in Matematica - 11 gennaio 2011
sottolineare: [**vecchio ordinamento 509**] [**nuovo ordinamento 270**]

Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito, anch'esso con cognome e nome e con il numero 2 messo in evidenza.

2. Nel piano Oxy di un riferimento inerziale $Oxyz$ con l'asse y verticale ascendente ($\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$) giace una guida circolare di raggio R e centro nell'origine. Un anello di massa M e raggio $r < R$ è vincolato a muoversi nel piano verticale Oxy all'interno della guida circolare mantenendo sempre un punto di contatto C con la guida (vincolo liscio) ma *senza* vincolo di puro rotolamento. Un punto P di massa m è *solidale* all'anello in un suo punto. Infine, tra il punto P e il suo corrispondente P' di eguale ascissa ($x_P = x_{P'}$) posto sull'asse x è tesa una molla lineare di costante elastica $h > 0$. In assenza di puro rotolamento, l'anello è un sistema olonomo a due gradi di libertà. Si riferisca quindi la posizione dell'anello alle coordinate θ, angolo tra la direzione negativa dell'asse y e il segmento OG tra l'origine ed il centro G dell'anello, e ϕ, angolo tra la direzione positiva dell'asse y e il segmento GP. Si consideri per semplicità il moto del sistema nella semiguida inferiore : $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

1) determinare l'energia potenziale totale (elastica e gravitazionale) e le configurazioni di equilibrio

2) indagare la stabilità delle configurazioni di equilibrio

3) Scrivere l'espressione dell'energia cinetica del sistema. Non è necessario svolgere tutti i conti, ma l'espressione deve essere completamente determinata.

4) si supponga ora che valga il vincolo di puro rotolamento. Quanti gradi di libertà ha ora il sistema ? esprimere la velocità angolare del'anello in funzione della coordinata lagrangiana $\theta, \dot{\theta}$

Svolgimento.

1) Mettiamo $U^g(y) = 0$ per $y = 0$. L'energia potenziale dell'anello è

$$U_A^g = Mgy_G = -Mg(R-r)\cos\theta$$

l'energia potenziale del punto è

$$U_P^g = mgy_P = -mg[(R-r)\cos\theta - r\cos\phi]$$

l'energia potenziale elastica è

$$U^{el} = \frac{h}{2}P'P^2 = \frac{h}{2}\Big((R-r)\cos\theta - r\cos\phi)\Big)^2.$$

2) Le configurazioni di equilibrio sono i punti in cui si annulla il gradiente di $U = U^{el} + U_P^g + U_A^g$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \theta} &= (R-r)\sin\theta[g(M+m) - h((R-r)\cos\theta - r\cos\phi)] = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \phi} &= r\sin\phi[-gm + h((R-r)\cos\theta - r\cos\phi)] = 0. \end{cases}$$

Una soluzione evidente è $\sin\theta = \sin\phi = 0$. Nel semipiano inferiore, gli equilibri $P(\theta,\phi)$ corrispondenti sono quindi

$$P_1 = (0,0), \qquad P_2 = (0,\pi).$$

Le altre soluzioni si ottengono rispettivamente imponendo $\sin\theta = 0$, $\sin\phi \neq 0$ e risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \theta &= 0, \\ 0 &= r[-gm + h((R-r) - r\cos\phi)] = 0 \end{cases}$$

oppure imponendo $\sin\theta \neq 0$, $\sin\phi = 0$ e risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 0 &= (R-r)[g(M+m) - h((R-r)\cos\theta - r\cos\phi)], \\ \sin\phi &= 0 \end{cases}$$

Limitiamoci per semplicità agli equilibri P_1 e P_2. In presenza di sole forze conservative possiamo accertare la stabilità con THN. Si ha

$$H_U(0,0) = Diag[g(M+m)(R-r) - h(R-2r)(R-r), gmr - hr(R-2r)]$$

che è definita positiva se solo se i due elementi diagonali sono entrambi positivi

$$\begin{cases} g(M+m) &> h(R-2r), \\ mg &> h(R-2r). \end{cases}$$

Quindi se se solo se

$$mg > h(R-2r).$$

Inoltre:

$$H_U(0,\pi) = Diag[g(M+m)R - hR(R+r), -gmr + hrR]$$

che è definita positiva se solo se i due elementi diagonali sono entrambi positivi

$$\begin{cases} g(M+m) & > & h(R-2r), \\ \\ hR & > & gm. \end{cases}$$

3) L'energia cinetica del sistema è somma di quella dell'anello e del punto $T = T_A + T_P$. Si ha allora (T. di Konig)

$$T_A = \frac{M}{2} v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

con

$$v_G^2 = (R-r)^2 \dot{\theta}^2, \quad I_G = MR^2, \quad \omega^2 = \dot{\phi}^2.$$

L'energia cinetica del punto è (uso FFMR per calcolare v_P)

$$T_P = \frac{m}{2} v_P^2 = \frac{m}{2} (v_G + \omega \wedge GP)^2 = \frac{m}{2} (v_G^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + 2 v_G \cdot \omega \wedge GP)$$

con

$$v_G = (R-r)\dot{\theta}[\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2], \quad GP = r(\sin\phi e_1 + \cos\phi e_2), \omega = -\dot{\phi} e_3.$$

In alternativa, è sempre possibile calcolare

$$v_P^2 = \dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2.$$

Si ha infine, (calcolo non richiesto)

$$T = \frac{1}{2}(M+m)(R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(MR^2 + mr^2)\dot{\phi}^2 + m(R-r)r\cos(\theta+\phi)\dot{\theta}\dot{\phi}.$$

4) Se vale il vincolo di puro rotolamento, il sistema è ad un solo grado di libertà, gli angoli θ e ϕ sono legati tra loro. La relazione si calcola imponendo la condizione di puro rotolamento: la velocità del punto di contatto è $v_C = 0$. Pertanto, dalla FFMR, usando i versori radiale e trasverso u_r, u_θ

$$v_C = v_G + \omega \wedge GC = (R-r)\dot{\theta} u_\theta + (-\dot{\phi} u_z) \wedge r u_r = 0$$

da cui

$$\dot{\phi} = \frac{(R-r)}{r} \dot{\theta}.$$