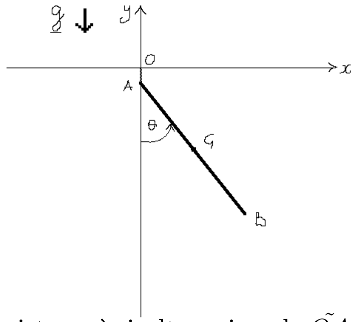
Esercizi **1 & 3**

Prima prova parziale di Fisica Matematica 2 - Corso di Laurea Triennale in Matematica - **10 maggio 2010**

Si consideri nel piano Oxy, y verticale ascendente, $\mathbf{g} = -g\,\hat{\mathbf{y}}, g > 0$, un'asta materiale AB di lunghezza $\ell = |AB|$ e massa m. L'estremo A è vincolato a scorrere senza attrito sull'asse y, l'asta è vincolata (senza attrito) a stare nel piano. Una molla di costante elastica $h > 0$ è tesa tra l'origine O e l'estremo A. Si considerino quali parametri lagrangiani l'ordinata y dell'estremo A e l'angolo ϑ orientato dal semiasse negativo delle y alla sbarretta AB. Studiarne gli equilibri, individuarne uno stabile e ivi calcolare le pulsazioni di piccola oscillazione.



Soluzione: La geometria del sistema è risolta scrivendo $\tilde{OA}(y,\vartheta) = (0,y)$, $\tilde{OG}(y,\vartheta) = (\frac{\ell}{2}\sin\vartheta, y - \frac{\ell}{2}\cos\vartheta)$ [*commento 1*: qui si deve far molta attenzione, molti sbagliano, scrivono infatti: $y_G = -(y + \frac{\ell}{2}\cos\vartheta)$]. L'energia potenziale totale (le forze in gioco sono conservative): $\mathcal{U}(y,\vartheta) = \frac{h}{2}y^2 + mgy_G = \frac{h}{2}y^2 + mg(y - \frac{\ell}{2}\cos\vartheta)$, Equilibri: $0 = \mathcal{U}'_y = hy + mg$, $\quad 0 = \mathcal{U}'_\vartheta = mg\frac{\ell}{2}\sin\vartheta$, $\quad (-\frac{mg}{h}, 0)$, $\quad (-\frac{mg}{h}, \pi)$
$\nabla^2\mathcal{U}(y,\vartheta)\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & mg\frac{\ell}{2}\cos\vartheta \end{pmatrix}$, $\nabla^2\mathcal{U}(-\frac{mg}{h},0)\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & mg\frac{\ell}{2} \end{pmatrix}$: def. pos.: stabile (per L-D), mentre in $(-\frac{mg}{h},\pi)$ è non definita: instabile (per THND).
Energia cinetica: $T(y,\vartheta,\dot{y},\dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}m|V_G|^2 + T_G = \frac{1}{2}m[(\frac{\ell}{2}\cos\vartheta\dot{\vartheta})^2 + (\dot{y} + \frac{\ell}{2}\sin\vartheta\dot{\vartheta})^2] + T_G$, $\ T_G = \frac{1}{2}\langle\mathcal{J}_G\omega,\omega\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} \right\rangle$. Infine:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 + 2\ell\sin\vartheta\dot{\vartheta}\dot{y} + \frac{\ell^2}{3}\dot{\vartheta}^2) = \frac{1}{2}\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} m & m\ell\sin\vartheta \\ m\ell\sin\vartheta & \frac{m\ell^2}{3} \end{pmatrix}}_{a(y,\vartheta)} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Piccole oscillazioni: $\mathcal{U}^{(0)}(y,\vartheta) = \frac{1}{2}\left\langle \nabla^2\mathcal{U}(-\frac{mg}{h},0)\begin{pmatrix} y + \frac{mg}{h} \\ \vartheta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y + \frac{mg}{h} \\ \vartheta \end{pmatrix} \right\rangle$,
$T^{(0)}(\dot{y},\dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}\left\langle a(-\frac{mg}{h},0)\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\det\left(\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & mg\frac{\ell}{2} \end{pmatrix} - \omega^2\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{3} \end{pmatrix}\right) = 0$$

Da cui [*Commento 2: senza fare lo sviluppo dei quadrati, dato che le due matrici sono diagonali!*] si ricava subito:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{h}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$$