2 & 4

Prima prova parziale di Fisica Matematica 2 - Corso di Laurea Triennale in Matematica - 10 maggio 2010

Esercizio:
Nel riferimento ortonormale $Oxyz$ con l'asse z diretto verso l'alto $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, un punto P di massa $m > 0$ è vincolato in modo liscio sul piano di equazione $x + y + z = 1$. Oltre alla forza peso, sul punto agisce anche una molla di costante elastica $h > 0$ tesa tra il punto P e il punto $C = (0, 0, 1)$. Si usino come coordinate lagrangiane le coordinate $x = x_P$ e $y = y_P$ del punto P.

1. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità sulla base dei teoremi visti

2. Determinare l'energia cinetica del sistema e le frequenze delle piccole oscillazioni

3. Si supponga ora che il sistema $Oxyz$ ruoti con velocità angolare costante ω attorno all'asse z rispetto ad un sistema inerziale. Scrivere le componenti lagrangiane della sollecitazione agente su P nel sistema rotante.

Soluzione. Il sistema è soggetto a sole forze conservative, gravitazionale ed elastica. Allora

$$U = U^g + U^{el} = mgz_P + \frac{h}{2}|CP|^2 = -mg(x+y) + \frac{h}{2}[x^2 + y^2 + (x+y)^2] + cost.$$

Gli equilibri sono i punti in cui si annulla il gradiente di $U(x, y)$, ovvero le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{aligned} U_x &= -mg + hy + 2hx = 0, \\ U_y &= -mg + hx + 2hy = 0. \end{aligned}$$

che ha soluzione unica

$$x^* = \frac{mg}{3h}, \qquad y^* = \frac{mg}{3h}.$$

La stabilità si puo' accertare con TLD o THND essendo la matrice Hessiana non degenere e definita positiva:

$$H_U(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} U_{xx} & U_{xy} \\ U_{yx} & U_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h & h \\ h & 2h \end{pmatrix} = hC$$

L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2}v_P^2 = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] = \frac{m}{2}\dot{q} \cdot A\dot{q}, \quad A = \begin{pmatrix} 2m & m \\ m & 2m \end{pmatrix} = mC.$$

Le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni di

$$\det(H_U - \omega^2 A) = \det(hC - \omega^2 mC) = (h - m\omega^2)^2 \det C = 0, \quad \det C \neq 0$$

ovvero

$$\omega_1^2 = \frac{h}{m}, \qquad \omega_2^2 = \frac{h}{m}.$$

Se ora il sistema $Oxyz$ ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse z, l'equazione del moto nel riferimento $Oxyz$ si scrive

$$ma^{(r)} = mg + F^{el} + F^{cf} + F^{cor} + \Phi.$$

L'energia potenziale centrifuga è

$$U^{cf} = -\frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

Le componenti della sollecitazione di Coriolis coincidono con le componenti cartesiane di F^{cor}

$$F^{cor} = -2m\omega \wedge v^r = -2m \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2m\dot{y} \\ -2m\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$