# 2 **cognome e nome**: ..................................

Appello di Fisica Matematica - seconda parte - Corso di Laurea Triennale in Matematica - 13 luglio 2011

sottolineare: **[vecchio ordinamento 509] [nuovo ordinamento 270]**

**Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito, anch'esso con cognome e nome e con il numero 2 messo in evidenza.**

**Esercizio**

Nel piano $Oxy$ con $y$ verticale ascendente di un riferimento $Oxyz$ si consideri la guida liscia coincidente con il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Un'asta $AP$ di massa trascurabile e lunghezza $l$ è vincolata a muoversi nel piano $Oxy$ con l'estremo $A$ libero di scorrere sulla guida. Nell'estremo $P$ dell'asta è vincolato un punto materiale $P$ di massa $m$. Si considerino come coordinate lagrangiane del sistema l'ascissa $x = x_A$ del punto $A$ e l'angolo $\theta$ tra la direzione negativa dell'asse delle $y$ e l'asta $AP$, valutato positivamente in senso antiorario. Infine, il riferimento $Oxyz$ ruoti con velocità angolare $\omega$ costante diretta lungo l'asse verticale $y$ rispetto agli spazi inerziali. Si consideri la descrizione del moto del sistema nel riferimento rotante.

a) Si scrivano le componenti lagrangiane delle forze agenti nel riferimento rotante $Oxyz$

b) Si determinino le configurazioni di equilibrio (relativo) con $x = 0$.

c) Si supponga ora che $f'(0) = 0$ e che $g > \omega^2 l$. Si studi la stabilità delle configurazioni di equilibrio con $x = 0$ sulla base dei teoremi visti nel corso.

d) Si scriva l'energia cinetica del sistema e l'equazione di secondo grado che permette di calcolare le frequenze di piccola oscillazione in una configurazione di equilibrio stabile con $x = 0$ (non è richiesto il calcolo delle frequenze).

e) Come si modifica l'energia potenziale e cinetica del sistema se invece dell'asta $AP$ si considera un'asta omogenea di massa $m$ e lunghezza $2l$ ? (E' sufficente rispondere sinteticamente ma in modo preciso).

**Teoria**

Enunciato e dimostrazione del Teorema di Noether

- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*

## SOLUZIONI

### Esercizio

*Traccia della soluzione*:

a) Le forze agenti nel riferimento rotante sono il peso, la forza centrifuga e quella di Coriols. Quest'ultima ha componenti lagrangiane nulle poichè

$$\delta L^{cor} = -2m\omega \wedge v_P \cdot \delta P \equiv 0$$

dal momento che i tre vettori sono complanari. Le altre sono conservative di energia potenziale

$$U = U^g + U^{cf} = mgy_P - \frac{\omega^2}{2}mx_P^2 = mg(f(x) - l\cos\theta) - \frac{\omega^2}{2}m(x + l\sin\theta)^2.$$

e le componenti sono date dal gradiente di $-U$.

b) le configurazioni di equilibrio annullano il gradiente di $U$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x,\theta) & = & mgf'(x) - m\omega^2(x + l\sin\theta) = 0 \\ \\ \frac{\partial U}{\partial \theta}(x,\theta) & = & mgl\sin\theta - m\omega^2(x + l\sin\theta)l\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Quelle con $x = 0$ devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x,\theta) & = & mgf'(0) - m\omega^2 l\sin\theta = 0 \\ \\ \frac{\partial U}{\partial \theta}(x,\theta) & = & mgl\sin\theta - m\omega^2 l\sin\theta l\cos\theta = 0 \end{cases}$$

e quindi: se $f'(0) = 0$

$$\sin\theta = 0, \qquad \theta = 0, \pi,$$

se $f'(0) \neq 0$

$$f'(0) = l\tan\theta, \qquad \theta = \arctan(f'(0)/l).$$

c) per la stabilità possiamo usare THND e TLD. Calcoliamo la matrice hessiana in $(0,\theta)$

$$H_U(0,\theta) = \begin{pmatrix} mgf''(0) - m\omega^2 & -m\omega^2 l\cos\theta \\ -m\omega^2 l\cos\theta & mgl\cos\theta - m\omega^2 l^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

Studio in $(0,0)$. Si vede che in base all'ipotesi $g > \omega^2 l$ si ha $U_{\theta\theta} > 0$. La matrice hessiana è ivi definita positiva (quindi l'equilibrio è stabile) sse

$$\det H_U(0,0) > 0, \quad i.e. \quad f''(0) > \frac{\omega^2}{g - \omega^2 l}.$$

Studio in $(0,\pi)$. Qui $U_{\theta\theta} < 0$. Per avere la matrice hessiana definita positiva dobbiamo supporre $U_{xx} > 0$, ovvero $gf''(0) > \omega^2$. L'equilibrio è stabile sse

$$\det H_U(0,\pi) > 0, \quad i.e. \quad f''(0) < \frac{\omega^2}{g + \omega^2 l}.$$

che è incompatibile con la condizione richiesta $gf''(0) > \omega^2$. quindi l'equilibrio è instabile.

d) L'energia cinetica si trova calcolando $v_P^2$ ed è

$$T = \frac{m}{2} v_P^2 = \frac{m}{2} [(1 + f'(x)^2 \dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l \sin\theta (\cos\theta + f'(x)) \dot{x} \dot{\theta}]$$

Le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni di

$$\det(H_U(0,0) - \Omega^2 A(0,0)) = 0.$$

e) vedi teoria. Il potenziale centrifugo è dato da $U^{cf} = -\frac{\omega^2}{2} I_y^G$ e l'energia cinetica ha in più il termine $\frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \dot{\theta}^2$.