# 3 **cognome e nome**: ..................................

Appello di Fisica Matematica - terza parte - Corso di Laurea Triennale in Matematica - 13 luglio 2011

**Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito, anch'esso con cognome e nome e con il numero 3 messo in evidenza.**

1• Siano

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \qquad\qquad & \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto X(x) = Ax & x &\mapsto Y(x) = Bx \end{aligned}$$

due campi vettoriali lineari. Usando proprietà della matrice esponenziale, dimostrare in dettaglio che se $AB = BA$, allora i flussi relativi alle due associate equazioni differenziali commutano:

$$\phi_X^t \circ \phi_Y^s(x) = \phi_Y^s \circ \phi_X^t(x), \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

2• Come si generalizza e si estende questo risultato al caso di generali campi vettoriali $X(x)$ e $Y(x)$ non lineari? Solo enunciati.

3• Supponiamo ora che i campi vettoriali $X(x)$ e $Y(x)$ siano Hamiltoniani: $X(x) = \mathbb{E}\nabla f(x)$ e $Y(x) = \mathbb{E}\nabla g(x)$. Affinché i loro flussi commutino è vero che condizione nec. & suff. è che la parentesi di Poisson $\{f, g\} = \textit{costante}$? oppure deve essere che $\{f, g\} = 0$? Giustificare la risposta.

Soluzione:
1• La proprietà sulle matrici richiesta è:

$$AB = BA \quad \Rightarrow \quad e^A e^B = e^{A+B}$$

da cui, dato che banalmente $A + B = B + A$,

$$e^A e^B = e^A e^B$$

Se ora invece di $A$ e $B$ consideriamo $At$ e $Bs$, allora tutto ancora funziona:

$$AB = BA \ \Rightarrow \ AtBs = BsAt, \qquad e^{At}e^{Bs} = e^{Bs}e^{At}$$

dunque, i flussi di $X$ e $Y$ commutano, $\forall t, s \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\Big(\Phi_X^t \circ \Phi_Y^s - \Phi_Y^s \circ \Phi_X^t\Big)(x) = e^{At}e^{Bs}x - e^{Bs}e^{At}x = 0$$

2• Nel caso $X$ e $Y$ non lineari vale il teorema: i flussi commutano sse le parentesi di Lie sono nulle: $[X, Y] = 0$.

3• Vale l'anti-morfismo d'algebra:

$$\mathbb{E}\nabla_x\{f, g\} = -[\mathbb{E}\nabla_x f, \mathbb{E}\nabla_x g].$$

pertanto le parentesi di Lie sono nulle sse $\nabla_x\{f, g\} = 0$, $(\det \mathbb{E} \neq 0)$ equivalentemente:

$$\{f, g\} = cost.$$