LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA 2
SECONDO COMPITINO — 16 Giugno 2011

Parte A

1 Si consideri, per fissati $a > 0$ e $\phi \in \mathbb{R}$, la seguente trasformazione lineare di $T^*\mathbb{R}^1 (= \mathbb{R}^2)$ in sè:

$$\begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\phi & a\sin\phi \\ -a\sin\phi & a\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

Dimostrare che è una trasformazione canonica indipendente dal tempo di valenza $c = 1$.

2 Due punti materiali di massa unitaria sono liberi di muoversi sull'asse delle x di un riferimento inerziale. Dette x_1 e x_2 le coordinate dei due punti, l'energia potenziale della forza che agisce tra i due punti è

$$U(x_1, x_2) = \frac{a}{(x_1 - x_2)^2} + b(x_1^2 + x_2^2)$$

Dopo aver scritto l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema nelle nuove coordinate

$$R = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad r = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

si trovi il moto del sistema per fissate condizioni iniziali a meno di inversione di funzioni e risoluzione di integrali con il metodo di Hamilton-Jacobi.

Parte B

Data una Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, enunciare e dimostrare il principio variazionale di Hamilton. Attenzione, aver cura di dimostrare in dettaglio che la condizione variazionale di stazionarietà è *necessaria e sufficiente* per le equazioni di Lagrange.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)*

SOLUZIONI

Esercizio A

1

$$J^T\mathbb{E}J = \begin{pmatrix} a\cos\phi & -a\sin\phi \\ a\sin\phi & a\cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\cos\phi & a\sin\phi \\ -a\sin\phi & a\cos\phi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -a\sin\phi & a\cos\phi \\ -a\cos\phi & a\sin\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\cos\phi & a\sin\phi \\ -a\sin\phi & a\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{E}$$

2

Nelle nuove coordinate (R, r) la lagrangiana del sistema è

$$L(r, \dot{R}, \dot{r}) = \frac{1}{2}(2\dot{R}^2 + 2\dot{r}^2) - \frac{a}{4r^2} - 2br^2 - 2bR^2$$

e l'Hamiltoniana corrispondente, separabile, si scrive

$$H = H_R + H_r = \frac{1}{4}p_R^2 + 2bR^2 + \frac{1}{4}p_r^2 + \frac{a}{4r^2} + 2br^2.$$

Cerco una funzione generatrice nella forma

$$S(t, R, r, \tilde{p}_R, \tilde{p}_r) = -t(\tilde{p}_R + \tilde{p}_r) + W_R(R, \tilde{p}_R) + W_r(r, \tilde{p}_r)$$

pertanto l'equazione di H-J si separa nelle due equazioni

$$\frac{1}{4}(\frac{\partial W_R}{\partial R})^2 + 2bR^2 = \tilde{p}_r, \qquad \frac{1}{4}(\frac{\partial W_r}{\partial r})^2 + \frac{a}{4r^2} + 2br^2 = \tilde{p}_r$$

di immediata soluzione

$$W_R = \pm 2\int \sqrt{\tilde{p}_R - 2bR^2}dR, \qquad W_r = \pm 2\int \sqrt{\tilde{p}_r - 2bR^2 - \frac{a}{4r^2}}dr$$

Il moto si ottiene, a meno di quadrature dalla trasformazione canonica

$$\tilde{r} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_r} = -t + \frac{\partial W_r}{\partial \tilde{p}_r}, \quad \tilde{R} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_R} = -t + \frac{\partial W_R}{\partial \tilde{p}_R}$$

e

$$p_r = \frac{\partial W_r}{\partial r}, \qquad p_R = \frac{\partial W_R}{\partial R}.$$