

2

cognome e nome:.....

Scritto di Fisica Matematica - seconda parte -

Corso di Laurea Triennale in Matematica - 21 giugno 2011

sottolineare: [vecchio ordinamento 509] [nuovo ordinamento 270]

Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio su cui è svolto il compito, anch'esso con cognome e nome, ordinamento e con il numero **2 messo in evidenza.**

- Nel sistema inerziale $Oxyz$ si considerano le due guide circolari:

$$C_1 : \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0$$

e

$$C_2 : \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad z = R$$

Su C_1 è vincolata senza attrito la particella P_1 di massa m , su C_2 è vincolata senza attrito la particella P_2 di ugual massa m . Si considerino quali parametri Lagrangiani l'angolo orientato θ dal semi-asse positivo x alla semiretta per OP_1 e l'angolo orientato ϕ dalla semiretta per OP_1 alla semiretta per OP'_2 , dove P'_2 è la proiezione ortogonale di P_2 sul piano Oxy .

Oltre alla gravità $\mathbf{g} = -g \hat{z}$, $g > 0$, è tesa una molla di costante elastica $H > 0$ tra P_1 e P_2 . Inoltre:

su P_1 è attaccata una molla di costante elastica $h > 0$ e di centro $(2R, 0, 0)$,
su P_1 è pure attaccata un'altra molla di costante elastica $h > 0$ e di centro $(0, 2R, 0)$. Scrivere l'energia cinetica del sistema, mettendo in evidenza la matrice cinetica. Determinare gli equilibri, individuarne uno stabile e lì impostare il problema delle piccole oscillazioni: $0 = \det(\dots)$. A questo punto, ponendo $g = m = h = H = R = 1$, determinare le frequenze di piccola oscillazione.

•• (i) Si consideri un corpo rigido libero (cioè, l'unico vincolo sia quello di rigidità), dimostrare che un moto è dinamicamente possibile se e solo se soddisfa le equazioni cardinali.

(ii) Si considerino le equazioni di Euler del corpo rigido, nel caso del seguente momento risultante delle forze esterne rispetto al baricentro:

$$\underline{N}_G^{(ext)} = -k\underline{\omega} \quad k > 0$$

Usando o il primo metodo o il secondo di Lyapunov (in quest'ultimo caso usare come candidata funzione di Lyapunov l'energia cinetica $T_G(\underline{\omega})$), dimostrare che nello spazio $\mathbb{R}^3$ ove valutiamo la velocità angolare, $\underline{\omega} = \underline{0}$ è stabile (asintoticamente?)

- Scrivere nome e cognome **in stampatello** su ogni foglio consegnato.
- Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.

- (traccia di soluzione)

$$T = \frac{1}{2}mR^2[\dot{\theta}^2 + (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2] \quad a(\theta, \phi) = mR^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U(\theta, \phi) = -2hR^2(\sin \theta + \cos \theta) - HR^2 \cos \phi$$

Equilibri: $\sin \phi = 0 : \phi = 0, \pi$ $\cos \theta = \sin \theta : \theta = \pi/4, \pi + \pi/4$

$$\nabla^2 U = \begin{pmatrix} 2hR^2(\sin \theta + \cos \theta) & 0 \\ 0 & HR^2 \cos \phi \end{pmatrix}$$

$(\theta_E, \phi_E) = (\pi/4, 0)$ è stabile. Per $g = m = h = H = R = 1$:

$$\omega_1 = \sqrt{\sqrt{2} + 1 + \sqrt{3}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3}}$$

- (traccia di soluzione)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T_G &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2}(\mathcal{I}\underline{\omega}, \underline{\omega}) = \frac{(\mathcal{I}\dot{\underline{\omega}}, \underline{\omega}) + (\mathcal{I}\underline{\omega}, \dot{\underline{\omega}})}{2} =_{(\mathcal{I}^T = \mathcal{I})} (\mathcal{I}\dot{\underline{\omega}}, \underline{\omega}) = \\ &= (-\underline{\omega} \wedge \mathcal{I}\underline{\omega} - k\underline{\omega}, \underline{\omega}) = -k|\underline{\omega}|^2, \end{aligned}$$

T_G è definita positiva attorno a $\underline{\omega} = 0$, $\frac{d}{dt}T_G$ è definita negativa attorno a $\underline{\omega} = 0$:
asintotica stabilità.