**LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA**
**FISICA MATEMATICA 2**
**PRIMO APPELLO — 21 Giugno 2011**

# 3

**Esercizio**
Nel riferimento ortonormale $Oxyz$ con l'asse $z$ diretto verso l'alto $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, un punto $P$ di massa $m > 0$ è vincolato in modo liscio su una superficie di rotazione avente asse di rotazione l'asse $z$. Si usino come coordinate lagrangiane le coordinate $\varphi$ e $z$ e si scriva come $r = f(z)$ l'equazione della curva che genera la superficie di rotazione.

a) si scriva la Lagrangiana del sistema, soggetto alla sola forza peso, e l'Hamiltoniana associata

b) si scriva l'equazione del moto del sistema con il metodo di Hamilton-Jacobi a meno del calcolo di primitive di integrali e inversione di funzioni, scrivendo in dettaglio la trasformazione canonica

c) si consideri ora il caso di un paraboloide di rotazione di equazione $r = f(z) = \sqrt{z}, z \geq 0$. Sotto quali condizioni sui dati iniziali il moto del punto può raggiungere l'origine del sistema di coordinate

- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*

**SOLUZIONI**

**Esercizio**

*Traccia della soluzione*: Le coordinate cartesiane del punto $P$ sono

$$x = f(z)\cos\varphi, \qquad y = f(z)\sin\varphi, \qquad z = z.$$

Derivando e quadrando si arriva all'energia cinetica

$$T = \frac{m}{2}[(1 + f'(z)^2)\dot{z}^2 + f(z)^2\dot{\varphi}^2]$$

e la Lagrangiana è

$$L = T - U^g = T - mgz.$$

L'Hamiltoniana associata alla Lagrangiana di tipo meccanico si scrive

$$H = T + U = \frac{1}{2m}[\frac{p_z^2}{1 + f'(z)^2} + \frac{p_\varphi^2}{f(z)^2}] + mgz.$$

Si vede che l'hamiltoniana ha tutte le coordinate cicliche tranne una, quindi uso una funzione generatrice del tipo ( $\tilde{p}_z = E$)

$$S = -Et + \tilde{p}_\varphi + W(\tilde{p}_\varphi, E, z).$$

a cui corrisponde l'equazione di HJ

$$\frac{1}{2m}[(\frac{\partial W}{\partial z})^2\frac{1}{1 + f'(z)^2} + \frac{\tilde{p}_\varphi}{f(z)^2}] + mgz = E.$$

La soluzione si scrive

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \pm\sqrt{[(E - mgz)2m - \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{f(z)^2}](1 + f'(z)^2)}$$

e la trasformazione canonica associata è

$$\tilde{z} = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\partial W}{\partial E} = -t \pm \int \frac{m(1 + f'(z)^2)}{\sqrt{[(E - mgz)2m - \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{f(z)^2}](1 + f'(z)^2)}}dz$$

$$\tilde{\varphi} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_\varphi} = +\frac{\partial W}{\partial \tilde{p}_\varphi} = \pm \int \frac{-(1 + f'(z)^2)f(z)^{-2}}{\sqrt{[(E - mgz)2m - \frac{\tilde{p}_\varphi^2}{f(z)^2}](1 + f'(z)^2)}}dz$$

$$p_z = \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial z}, \qquad p_\varphi = \tilde{p}_\varphi.$$

per il punto c): Se si suppone $g = 0$ possiamo usare il T. di Clairaut per il moto geodetico su una superficie di rivoluzione. Siccome $r\sin\alpha = f(z)\sin\alpha = cost = r_0\sin\alpha_0$ il punto raggiunge l'origine delle coordinate solo se $\sin\alpha_0 = 0$, ovvero la velocità iniziale è diretta lungo il locale meridiano. Se invece supponiamo $g \neq 0$, la velocità del punto $P$ non è più costante ma è comunque limitata dalla conservazione dell'energia

$$\frac{m}{2}v^2 + mgz = \frac{m}{2}v_0^2 + mgz_0 = E$$

Usiamo quindi la conservazione del momento angolare ($f(z) = \sqrt{z}$ per il paraboloide)

$$r^2\dot{\varphi} = f(z)^2\dot{\varphi} = z\dot{\varphi} = f(z_0)^2\dot{\varphi}_0 = z_0\dot{\varphi}_0$$

da cui segue nuovamente che è possibile raggiungere l'origine solo se la velocità iniziale è diretta lungo il locale meridiano.