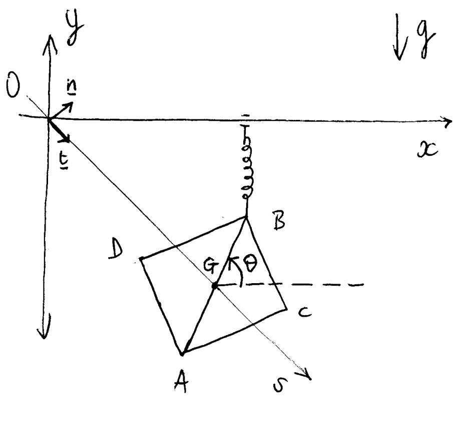
**LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA**
**FISICA MATEMATICA 2**
**PRIMO COMPITINO — 25 Maggio 2011**

**Parte A**

Nel riferimento inerziale ortonormale $Oxyz$ con l'asse $y$ diretto verso l'alto $\mathbf{g} = (0, -g, 0)$, si consideri il sistema giacente nel piano $Oxy$ costituito da una guida rettilinea liscia passante per l'origine individuata dal versore $\mathbf{t} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e da una lamina quadrata omogenea di lato $l$ e massa $m$ il cui baricentro $G$ è vincolato a scorrere lungo la guida. Si riferisca il sistema alle coordinate lagrangiane $(s, \theta)$ rispettivamente ascissa di $G$ sulla guida orientata dal versore $\mathbf{t}$ e angolo formato dalla direzione positiva dell'asse $x$ e il segmento $GB$ (vedi figura) orientato positivamente in senso antiorario. Oltre alla gravità, sulla lamina agisce una forza elastica dovuta ad una molla tesa tra il vertice $B$ della lamina e il punto $B'$ di eguale ascissa posto sull'asse $x$; infine, sul baricentro $G$ agisce una forza linearmente viscosa $F = -kv_G$, $k > 0$.

1. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità sulla base dei teoremi visti
2. Determinare l'energia cinetica del sistema e le frequenze delle piccole oscillazioni nell'ipotesi che $F = -kv_G \equiv 0$
3. Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema di coordinate $(s, \theta)$ e confrontarle con le equazioni cardinali del moto della lamina (polo in $G$) usando la base $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$.




**Parte B**

Rispondere alle seguenti domande

Si consideri un sistema vincolato 1-dimensionale, con

$$\text{energia cinetica} \quad : \quad T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2$$

$$\text{energia potenziale} \quad : \quad \mathcal{U} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad q \mapsto \mathcal{U}(q)$$

$(i)$ Cosa significa che $q^* \in \mathbb{R}$ è d'equilibrio per questo sistema?
$(ii)$ Usando opportunamente primo e secondo metodo di Lyapunov, enunciare e dimostrare il Teorema-dell'Hessiano-Non-Degenere, proponendo opportune ipotesi su $\mathcal{U}$ e le sue derivate.

---

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)*

## SOLUZIONI

### Esercizio A

Calcoliamo le componenti lagrangiane della sollecitazione delle forze conservative:

$$U(s,\theta) = U^g + U^{el} = mgy_G + \frac{h}{2}y_B^2 = -mg\frac{\sqrt{2}}{2}s + \frac{h}{2}[\frac{\sqrt{2}}{2}(l\sin\theta - s)]^2$$

La forza viscosa $F = -kv_G$ ha componenti lagrangiane

$$Q_s(s,\dot{s}) = -k\dot{s}, \qquad Q_\theta = 0.$$

e quindi non interviene nella determinazione degli equilibri. Le configurazioni di equilibrio sono i punti $(s,\theta)$ ove si annulla $\nabla U$:

$$\begin{cases} U_s &= -mg\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{h}{2}(l\sin\theta - s) = 0 \\ U_\theta &= \frac{h}{2}(l\sin\theta - s)l\cos\theta = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} -lmg\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta = 0 \\ s = l\sin\theta + \frac{mg\sqrt{2}}{h} \end{cases}$$

le configurazioni di equilibrio sono quindi

$$P_1 = (\frac{\pi}{2}, s_1) = (\frac{\pi}{2}, l + \frac{mg\sqrt{2}}{h}), \qquad P_2 = (\frac{3\pi}{2}, s_2) = (\frac{3\pi}{2}, -l + \frac{mg\sqrt{2}}{h})$$

Calcoliamo la matrice hessiana

$$H_U(s,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} & -\frac{hl}{2}\cos\theta \\ -\frac{hl}{2}\cos\theta & \frac{hl^2}{2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \frac{hl}{2}s\sin\theta \end{pmatrix}$$

e valutiamola negli equilibri. Si trova

$$H_U(P_1) = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} & 0 \\ 0 & lmg\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad H_U(P_2) = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} & 0 \\ 0 & -lmg\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Quindi $P_1$ è stabile per TLD mentre non possiamo applicare THND e quindi non possiamo dire nulla in $P_2$.

Energia cinetica. Usiamo il Teorema di Konig

$$T = \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}(\omega, I_G\ \omega) = \frac{m}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{12}(l^2 + l^2)\dot{\theta}^2$$

Le frequenze di piccola oscillazione in $P_1$ si trovano dall'equazione

$$\det(H_U(P_1) - \omega^2 A(P_1)) = 0, \qquad \det\begin{pmatrix} \frac{h}{2} - \omega^2 m & 0 \\ 0 & lmg\frac{\sqrt{2}}{2} - \omega^2\frac{ml^2}{6} \end{pmatrix} = 0$$

che ha soluzioni

$$\omega_1^2 = \frac{h}{2m}, \qquad \omega_2^2 = \frac{3\sqrt{2}g}{l}.$$

Equazioni di Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}) - \frac{\partial T}{\partial s} &= -\frac{\partial U}{\partial s} + Q_s \quad i.e. \quad m\ddot{s} = mg\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{h}{2}(l\sin\theta - s) - k\dot{s} \\ \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= -\frac{\partial U}{\partial \theta} \quad i.e. \quad \frac{ml^2}{6}\ddot{\theta} = -\frac{h}{2}(l\sin\theta - s)l\cos\theta \end{cases}$$

Scriviamo ora le equazioni cardinali della lamina con polo in $G$

$$\begin{cases} ma_G = m\ddot{s}\mathbf{t} = \Phi\mathbf{n} + m\mathbf{g} + F^{el} - k\dot{s}\mathbf{t} \\ \dot{M}_G = I_G\dot{\omega} = \frac{ml^2}{6}\ddot{\theta}\mathbf{b} = N_G = GB \wedge F^{el} \end{cases}$$

Si vede che le equazioni di Lagrange corrispondono rispettivamente alla proiezione della prima equazione cardinale su $\mathbf{t}$ e alla seconda.