Algebra 2 - 13 settembre 2012

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

1. Sia G un gruppo abeliano finito di ordine $|G| = mn$ con m, n primi fra loro. Indichiamo con P_m l'insieme dei divisori primi di m. Sia H l'insieme degli elementi di G il cui ordine contiene solo primi di P_m. Si dimostri che:
   (a) H è un sottogruppo di G;
   (b) nel gruppo quoziente G/H non ci sono elementi con ordine un primo di P_m;
   (c) G/H ha ordine primo con m;
   (d) H ha ordine m.
2. Si fattorizzi in prodotto di irriducibili il polinomio $x^4 + 1$
   (a) in $\mathbb{R}[x]$;
   (b) in $\mathbb{Q}[x]$;
   (c) in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$;
   (d) in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[x]$;
   (e) in $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}[x]$.
3. Siano H, K sottogruppi del gruppo G.
   (a) Si verifichi che ogni classe laterale destra di $H \cap K$ in G è intersezione di una classe laterale destra di H in G e di una classe laterale destra di K in G.
   (b) Si dimostri che se H e K hanno indice finito in G, rispettivamente $|G : H| = m$ e $|G : K| = n$, allora l'indice di $H \cap K$ in G è finito, e anzi $|G : H \cap K| \leq mn$.
   (c) Si dimostri che l'intersezione di una classe laterale destra di H in G e di una classe laterale destra di K in G, se non è vuota, è una classe laterale destra di $H \cap K$ in G.
4. Sia D un dominio d'integrità fattoriale.

(a) Si completi la definizione:"Il polinomio non nullo $f \in D[x]$ è primitivo se ...".

(b) Si dimostri il *lemma di Gauss*: il prodotto di due polinomi primitivi è primitivo.

5. Sia $u = \sqrt{2+\sqrt{5}} \in \mathbb{R}$.

   (a) Trovare il polinomio minimo f di u su $\mathbb{Q}$;

   (b) scrivere $u + \frac{1}{u}$ come espressione polinomiale in u a coefficienti in $\mathbb{Q}$;

   (c) calcolare il grado $[E : \mathbb{Q}]$, dove E è campo di spezzamento per f su $\mathbb{Q}$.

6. Sia a un fissato elemento del gruppo G. Si dimostri che l'insieme $\mathbb{X}$ di sottogruppi di G

$$\mathbb{X} = \{H \leq G \mid a \notin H\}$$

   ordinato per inclusione, ha un elemento massimale.