Algebra 2 - Secondo appello - 26 febbraio 2013
Tema A

Nome e Cognome:

Matricola:

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

1. (a) Siano G un gruppo, H un suo sottogruppo. Si completi la definizione: "H è un sottogruppo normale di G se..."

   (b) Se H, K sono sottogruppi del gruppo G, e H è normale in G, si dimostri che l'insieme $HK = \{xy \mid x \in H, y \in K\}$ è un sottogruppo di G.

2. (a) Dimostrare che se un gruppo finito X ha ordine $|X| = pq$ dove p, q sono primi tali che $p > q$ e q non divide $p-1$, allora X è ciclico. (Sugg.: contare i p-sottogruppi di Sylow e i q-sottogruppi di Sylow)

   (b) Consideriamo un gruppo G di ordine $|G| = 5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$.

      i. Provare che G ha un unico 7-sottogruppo di Sylow e un unico 13-sottogruppo di Sylow, che chiamiamo A, B rispettivamente.

      ii. Sia S un 5-sottogruppo di Sylow di G. Provare che SA ed SB sono sottogruppi ciclici di G.

      iii. Provare che S è l'unico 5-sottogruppo di Sylow di G.

      iv. Provare che G è ciclico.

3. Sia H un sottogruppo del gruppo G; il suo centralizzante è il sottogruppo $C(H) = \{x \in G \mid xh = hx \, \forall h \in H\}$. Provare che se H è normale in G allora $C(H)$ è normale in G.

4. Sia F un sottocampo del campo E. Supponiamo che $v \in E$ sia trascendente su F.

   (a) Provare che ogni potenza v^n con n intero positivo è trascendente su F.

   (b) Provare che v^{-1} è trascendente su F.

5. Sia F un sottocampo del campo E. Supponiamo che $u \in E$ sia algebrico su F con polinomio minimo $g \in F[x]$ di grado n. Dimostrare che $\{1, u, \ldots, u^{n-1}\}$ è una base di $F(u)$ su F.

6. (a) Verificare che il polinomio ciclotomico $\Phi_9(x) = x^6 + x^3 + 1$.

(b) Sia z una radice primitiva nona di 1. Poniamo $u = z + \frac{1}{z}$. Verificare che u è zero del polinomio $f = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$, e anzi che f è il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}$.

(c) Provare che anche $u^2 - 2$ è zero di f.

(d) $Q(u)$ è campo di spezzamento per f su $\mathbb{Q}$?

(e) Dimostrare che $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(z) \cap \mathbb{R}$.