Algebra 2 - 27 agosto 2012

Nome e Cognome:

Matricola:

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

1. Si fattorizzi in prodotto di irriducibili il polinomio $g = x^5 - 1$
   (a) in $\mathbb{Q}[x]$;
   (b) in $\mathbb{R}[x]$;
   (c) in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$.
2. Siano F un campo ed $f \in F[x]$ un polinomio non nullo.
   (a) Si completi la definizione: "L'estensione E di F è campo di spezzamento per f su F se ...".
   (b) Dato il polinomio non nullo $f \in \mathbb{Q}[x]$, si dica se esiste e se è unico il campo di spezzamento per f su $\mathbb{Q}$ contenuto in $\mathbb{C}$.
3. Consideriamo il seguente insieme di matrici a coefficienti nel campo $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid ac \neq 0 \right\}.$$
   (a) Si verifichi che G è un sottogruppo di ordine 12 del gruppo $GL(2, \mathbb{F}_3)$.
   (b) Si verifichi che
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \mid b = 0 \right\}, \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \mid a = c = 1 \right\}$$
   sono rispettivamente un 2-sottogruppo di Sylow e un 3-sottogruppo di Sylow di G.
   (c) Si dica quanti sono i 2-sottogruppi di Sylow e i 3-sottogruppi di Sylow di G.
   (d) È vero che G è isomorfo al gruppo alterno A_4?
4. Sia $u = \sqrt{2}(1 + i) \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}, i]$.
   (a) Verificare che $\mathbb{Q}(u^2) = \mathbb{Q}[i]$.
   (b) Trovare il polinomio minimo f di u su $\mathbb{Q}$.

(c) Controllare se $\mathbb{Q}(u)$ è campo di spezzamento di f su $\mathbb{Q}$.

5. Si dimostri che se le due congruenze in $\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{a} \\ x \equiv 1 \pmod{b} \end{cases}$$

hanno una soluzione c in comune, allora a, b sono primi tra loro.

6. (a) Sia G un gruppo ciclico non identico. Si dimostri che se G è infinito, oppure se G è finito e il suo ordine non è primo, allora G contiene un sottogruppo proprio non identico.

   (b) Si dimostri che se G è un gruppo non identico privo di sottogruppi propri non identici allora G è ciclico di ordine primo.