Algebra 2 - 5 settembre 2013

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

1. Nel gruppo abeliano G indichiamo con T l'insieme dei suoi elementi periodici. Dimostrare che
   (a) T è un sottogruppo di G;
   (b) nel gruppo quoziente G/T il solo elemento periodico è l'identità.

2. Studiamo qualche proprietà del gruppo alterno A_5 (delle permutazioni pari su $\{1,2,3,4,5\}$).
   (a) Determinare l'ordine di A_5.
   (b) Verificare che per ogni $x \in \{1,2,3,4,5\}$ lo stabilizzatore $\mathrm{Stab}(x)= \{\sigma \in A_5 \mid \sigma(x) = x\}$ è isomorfo al gruppo alterno A_4.
   (c) Dire se $V = \{1,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$ è un 2-sottogruppo di Sylow di A_5.
   (d) Provare che il normalizzante $N_{A_5}(V) = \mathrm{Stab}(5)$.
   (e) Esibire un 3-sottogruppo di Sylow e un 5-sottogruppo di Sylow di A_5.
   (f) Calcolare il numero dei 2-sottogruppi di Sylow di A_5.

3. Sia $u = \sqrt{3+\sqrt{5}} \in \mathbb{R}$.
   (a) Determinare il polinomio minimo g di u su $\mathbb{Q}$.
   (b) Trovare tutti gli zeri complessi di g.
   (c) Dire se $\mathbb{Q}(u)$ è campo di spezzamento per g su $\mathbb{Q}$.

4. Scrivere il polinomio $x^4 + 1$ come prodotto di polinomi irriducibili
   (a) in $\mathbb{R}[x]$;
   (b) in $\mathbb{Q}[x]$;
   (c) in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$;
   (d) in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$;
   (e) in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$.

5. Dimostrare il teorema:

   Dato il sottocampo F del campo E, indichiamo con A l'insieme degli elementi di E algebrici su F.

   A è un sottocampo di E contenente F.

6. Sia A un anello commutativo (con unità 1). Fissiamo un elemento non nilpotente $b \in A$ (cioè $b^n \neq 0$ per ogni intero positivo n).

   Dimostrare che l'insieme $\mathcal{X}$ degli ideali di A che hanno intersezione vuota con $\{b^n \mid n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$, ordinato per inclusione, ha un elemento massimale.