Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Ingegneria industriale

canale 5

III Appello – 5 luglio 2013 – compito A

DOMANDE

1. Supponiamo che $v_1, \ldots, v_n$ siano generatori dello spazio vettoriale V, e che il vettore $w \in V$ non appartenga al sottospazio $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ generato dai primi r. Dimostrare che esiste uno dei rimanenti vettori v_j con $r < j$ con la seguente proprietà: se nella lista di partenza $v_1, \ldots, v_n$ si scarta v_j e lo si sostituisce con w, anche la lista così ottenuta genera V.
2. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n sul campo K.
   (a) Completare la definizione '$\lambda \in K$ è un autovalore per f se...'
   (b) Fissiamo una base di V, e supponiamo che rispetto a questa base f sia rappresentato dalla matrice A. Dimostrare che se $p_A(x)$ è il polinomio caratteristico di A e λ è un autovalore per f risulta $p_A(\lambda) = 0$.
3. Sia $u \in \mathbb{R}^n$ un vettore non nullo. Indichiamo con $\cdot$ il solito prodotto scalare. Dimostrare che ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ è somma del vettore $\frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$ parallelo ad u e del vettore $v - \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$ ortogonale ad u.

ESERCIZI

Esercizio 1. Al variare del parametro reale k, si consideri l'endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ t & -1 & t+2 \\ 0 & 0 & t+1 \end{pmatrix}$$

(a) Controllare che $e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ è un autovettore relativo all'autovalore -1 per ogni f_k.

(b) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la molteplicità geometrica di -1.

(c) Determinare i valori del parametro k per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile. Per tali valori trovare una matrice diagonale D e una matrice H tale che $H^{-1} A_k H = D$.

Esercizio 2. Si considerino il punto $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$ e la retta r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

(a) Scrivere un'equazione del piano α passante per A e ortogonale alla retta r.

(b) Scrivere un'equazione del piano β contenete r ed A.

(c) Calcolare la distanza di A da r.

Esercizio 3. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$S = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle, \qquad T = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle.$$

(a) Si determinino le dimensioni di S, T ed $S^\perp$.

(b) Si dica se è vero che

  (b1) $S \oplus S^\perp = \mathbb{R}^4$

  (b2) $S \oplus T = \mathbb{R}^4$

  (b3) $S^\perp \oplus T = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 4. Si dica se la matrice a coefficienti complessi

$$A = \begin{pmatrix} -1 & i \\ 1 - 2i & -2 \end{pmatrix}$$

è invertibile, e in caso affermativo se ne calcoli l'inversa (coefficienti nella forma $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$).