

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA INDUSTRIALE

(CANALE 5)

II prova parziale – 14 Giugno 2013 – compito C

DOMANDE

1. (a) Dare la definizione di matrici simili.
(b) Dimostrare che due matrici simili hanno lo stesso determinante.
2. (a) Dati due vettori $a, b \in \mathbb{R}^n$, consideriamo le funzioni

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

definite ponendo per ogni $v \in \mathbb{R}^n$

$$f(v) = v \cdot a, \quad g(v) = v \cdot b.$$

È vero che se $f = g$ allora $a = b$?

- (b) Data una funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, consideriamo il vettore

$$a = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrare che per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ risulta $f(v) = v \cdot a$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A_k := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1-k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2-2k & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

- (a) Dire per quali valori di k il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore di A_k .
Per tali valori di k , scrivere a quale autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ è associato e calcolare la molteplicità geometrica di λ .
- (b) Dire per quali valori di k lo scalare 0 è autovalore di A_k .
Per tali valori di k , determinare una base dell'autospazio associato all'autovalore 0.
- (c) Per $k = 1$, determinare tutti gli autovettori della matrice A_1 che appartengono al sottospazio vettoriale $W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \right\}$.
- (d) Dire per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile.
Per tali valori di k , determinare una matrice ortogonale H che diagonalizza A_k e la corrispondente forma diagonale D .

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$.

- Controllare che $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
- Determinare una base ortogonale $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $\langle w_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$, $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$, $\langle w_1, w_2, w_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.
- Scrivere la matrice di cambiamento di base P dalla ‘vecchia’ base $\mathcal{V}$ alla ‘nuova’ base $\mathcal{W}$.
- Consideriamo il sottospazio $S := \langle v_1, v_2 \rangle$. Scrivere la matrice, $B := B_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}$ della proiezione ortogonale $p_S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{W}$. Si scriva la matrice $C := C_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ della stessa proiezione in base canonica.

Esercizio 3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortonormale, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Determinare l’equazione cartesiana del piano π passante per A, B, C .
- Determinare il luogo dei punti dello spazio equidistanti da A e B .
- Indicato con D il punto di minima distanza di C dalla retta r passante per A e B , determinare i vertici di ogni possibile quadrato contenuto in π che ha il segmento CD come lato.

Regole d’esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, etc.).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 2 ore.
- È possibile ritirarsi dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera “R” sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall’aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l’uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo.