Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA INDUSTRIALE

(CANALE 5)

II prova parziale – 14 Giugno 2013 – compito D

DOMANDE

1. (a) Dare la definizione di matrici simili.

   (b) Dimostrare che due matrici simili hanno lo stesso determinante.

2. (a) Dati due vettori a, $b \in \mathbb{R}^n$, consideriamo le funzioni

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

   definite ponendo per ogni $v \in \mathbb{R}^n$

$$f(v) = v \cdot a, \qquad g(v) = v \cdot b.$$

   È vero che se $a \neq b$ allora $f \neq g$?

   (b) Data una funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, consideriamo il vettore

$$a = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

   Dimostrare che per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ risulta $f(v) = v \cdot a$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Si consideri, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A_k := \begin{pmatrix} -1 & 1 & k-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2k-2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

(a) Dire per quali valori di k il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore di A_k.

Per tali valori di k, scrivere a quale autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ è associato e calcolare la molteplicità geometrica di λ.

(b) Dire per quali valori di k lo scalare 0 è autovalore di A_k.

Per tali valori di k, determinare una base dell'autospazio associato all'autovalore 0.

(c) Per $k = 1$, determinare tutti gli autovettori della matrice A_1 che appartengono al sottospazio vettoriale $W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \right\}$.

(d) Dire per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile.

Per tali valori di k, determinare una matrice ortogonale H che diagonalizza A_k e la corrispondente forma diagonale D.

(voltare pagina)

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$.

(a) Controllare che $\mathcal{V} = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare una base ortogonale $\mathcal{W} = \{ w_1, w_2, w_3 \}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $\langle w_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$, $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$, $\langle w_1, w_2, w_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

(c) Scrivere la matrice di cambiamento di base P dalla 'vecchia' base $\mathcal{V}$ alla 'nuova' base $\mathcal{W}$.

(d) Consideriamo il sottospazio $S := \langle v_1, v_2 \rangle$. Scrivere la matrice, $B := B^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}}$ della proiezione ortogonale $p_S \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{W}$. Si scriva la matrice $C := C^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ della stessa proiezione in base canonica.

Esercizio 3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortonormale, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B, C.

(b) Determinare il luogo dei punti dello spazio equidistanti da A e B.

(c) Indicato con D il punto di minima distanza di C dalla retta r passante per A e B, determinare i vertici di ogni possibile quadrato contenuto in π che ha il segmento CD come lato.

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, etc.).
- Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**.
- NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- La durata del compito è di 2 ore.
- È possibile ritirarsi dalla prova in qualsiasi momento: scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- Non è consentito uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo.