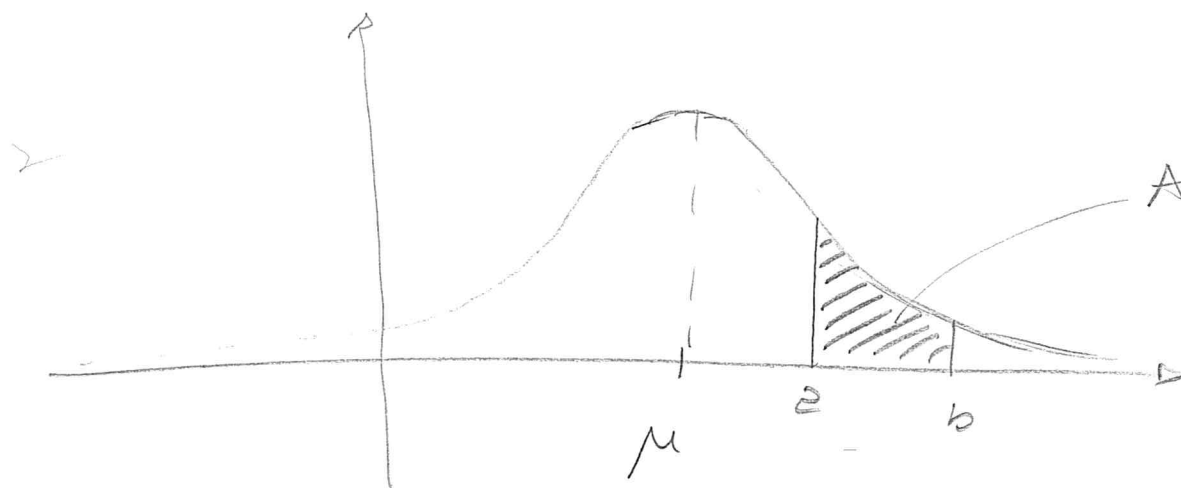


VARIABILI ALEATORIE NORMALI

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{se} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



$$\begin{aligned} \text{Area} &= P[a < X < b] \\ &= P[a \leq X \leq b] \end{aligned}$$

- $\mu = E[X]$
- $\sigma^2 = \text{Var}[X]$

$f(x)$ è simmetrica rispetto a μ ($f(\mu-x) = f(\mu+x)$)
 $\forall x \geq 0$

quindi $P[X > \mu] = P[X < \mu] = \frac{1}{2}$

μ è anche la mediana di X .

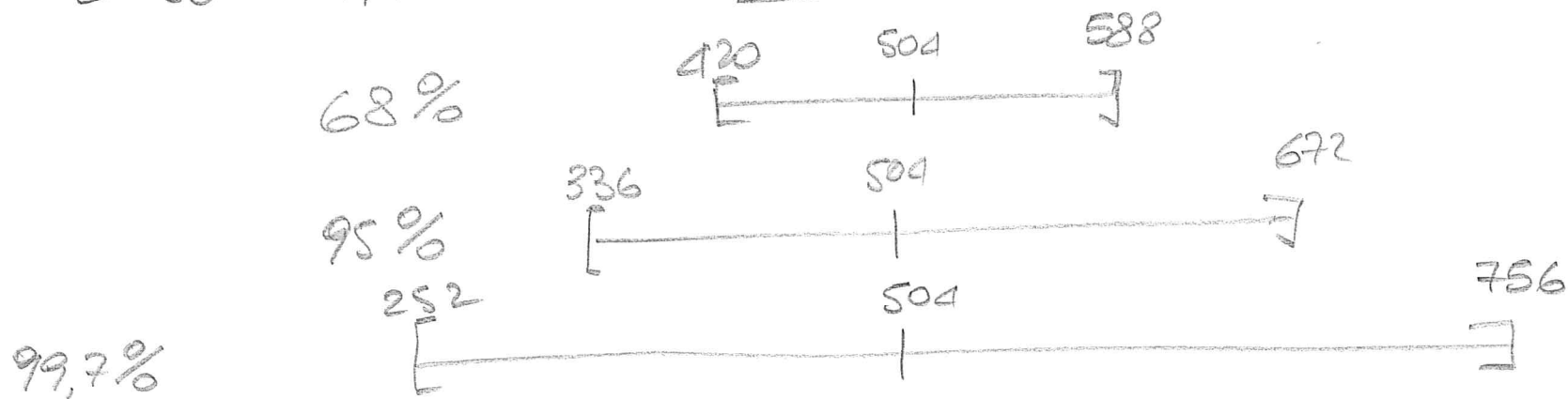
Regole empiriche:

$$P[X \in (\mu - \sigma, \mu + \sigma)] = 0,68$$

$$P[X \in (\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)] = 0,95$$

$$P[X \in (\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)] = 0,997$$

Es: I voti di un test si distribuiscono con legge normale di media 504 e deviazione standard 84.
 Allora il 68% dei voti è compreso tra $504 - 84 = \underline{420}$ e $504 + 84 = \underline{588}$, il 95% tra $504 - 168 = \underline{336}$ e $504 + 168 = \underline{672}$ e il 99,7% tra $\underline{252}$ e $\underline{756}$



Per calcolare le probabilità legate a una v.e. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ è utile la seguente trasformazione:

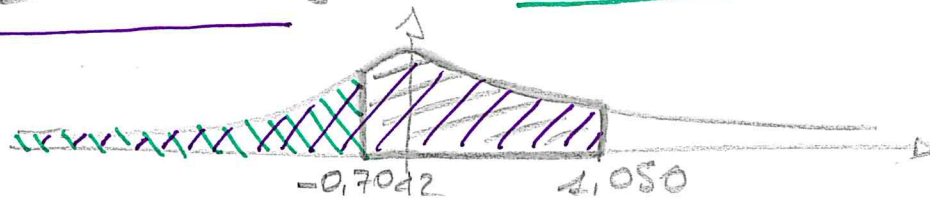
$$\frac{X - \mu}{\sigma} = Z \sim N(0, 1) \quad \text{normale standard}$$
$$E[Z] = 0, \text{Var}[Z] = 1$$

Si ha $P[X < a] = P\left[\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{a - \mu}{\sigma}\right] = P\left[Z < \frac{a - \mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$

Es: Se il Q1 degli studenti di 1^a media si distribuisce con legge normale di media 100 e dev. standard 14.2

① Probabilità che uno studente scelto a caso abbia Q1 tra 90 e 115?

$$P[90 < X < 115] = P\left[\frac{90 - 100}{14.2} < Z < \frac{115 - 100}{14.2}\right] = P[-0.7042 < Z < 1.056]$$
$$= \underbrace{P[Z < 1.056]}_{0.854} - \underbrace{P[Z < -0.7042]}_{0.242} = 0.854 - 0.242 = 0.612$$



Proprietà delle v.e. Normali

- $E[ax+b] = aE[X] + b$
- $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$
- $Var[ax+b] = a^2 Var[X]$
- Se X e Y sono indipendenti, cioè $\forall a < b$ e $c < d$
 $P[a < X < b, c < Y < d] = P[a < X < b] \cdot P[c < Y < d]$

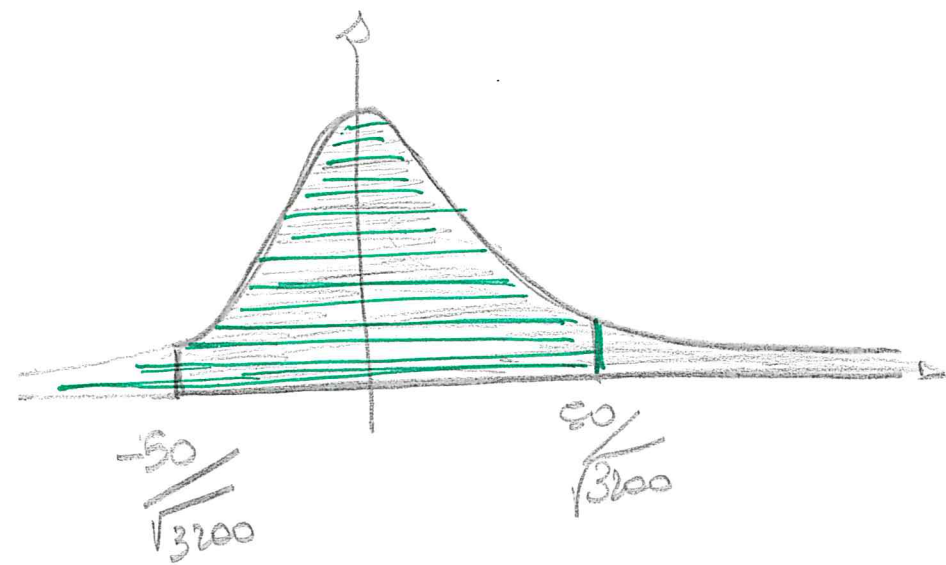
allora $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$

Es: Una lampadina ha tempo di vita $X \sim N(400, 40^2)$ (ore)

Se ho 2 lampadine e utilizzo le secondi per sostituire la prima quando si brucia, qual è la prob. che le due lampadine bastano per 750 ore? $X = \text{tempo vita } 1^a$, $Y = \text{tempo vita } 2^a$.

$$P[X+Y > 750] \quad \text{dove } X+Y \sim N(400+400, 40^2+40^2)$$

$$P\left[\frac{X+Y - 800}{\sqrt{40^2+40^2}} > \frac{750-800}{\sqrt{40^2+40^2}}\right] = P\left[Z > \frac{-50}{\sqrt{3200}}\right] = P\left[Z < \frac{50}{\sqrt{3200}}\right] \quad (4)$$



$$P[Z < 0.884] = \text{dalle tabelle} \\ \approx 0,81$$

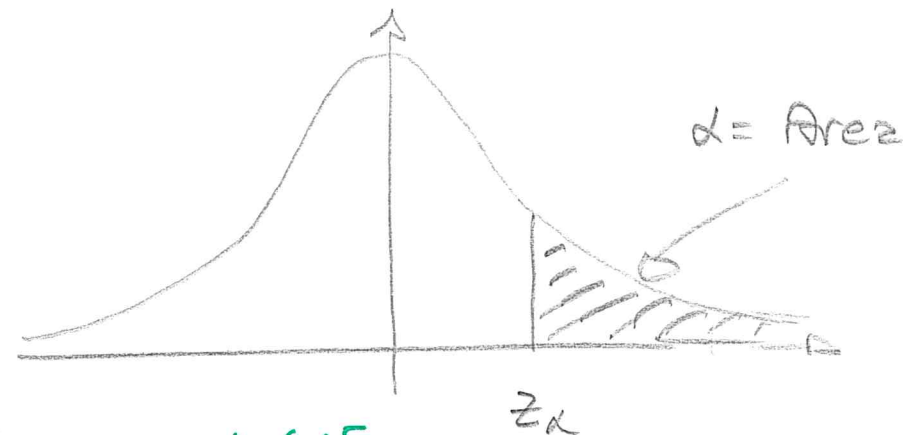
PERCENTILI

$$Z \sim N(0,1)$$

Se $\alpha \in [0,1]$, il valore z_α t.c.

$$P[Z > z_\alpha] = \alpha \quad \text{e' detto}$$

$100(1-\alpha)$ -esimo percentile

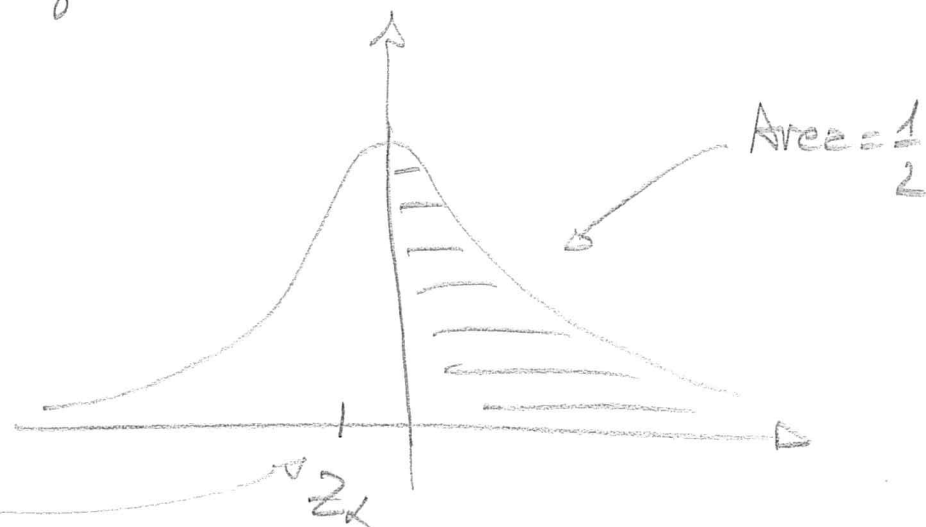


Se $\alpha = 0.05$, il	95-esimo percentile e'	$z_{0.05} = 1.645$
$\alpha = 0.025$, il	97,5-esimo percentile e'	$z_{0.025} = 1.9$
$\alpha = 0.1$	90-esimo percentile	$z_{0.1} = 1.282$
$\alpha = 0.01$	99-esimo percentile	$z_{0.01} = 2.326$

OSS: Se $\alpha > 0.5$, z_α è negativo

$$P[Z > z_\alpha] = \alpha > \frac{1}{2}$$

$$\boxed{z_{0.5} = 0}$$



Percentili di $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\forall \alpha \in [0, 1] \quad P[X > \mu + \sigma z_\alpha] = \alpha$$

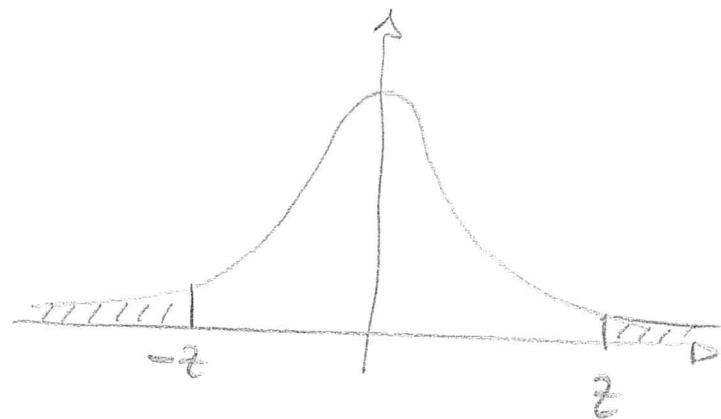
Quindi il 95° percentile di X è $\mu + \sigma z_{0.05}$
il 99° $\mu + \sigma z_{0.01}$

Perché? $P[X > x_\alpha] = \alpha \Rightarrow P\left[\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right] = P\left[Z > \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right] = \alpha$
Sappiamo che z_α è t.c. $P[Z > z_\alpha] = \alpha \Rightarrow \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma} = z_\alpha \Rightarrow \boxed{x_\alpha = \mu + \sigma z_\alpha}$ (6

Altro caso importante

Quanto vale il valore z per il quale $P[|Z| > z] = \alpha$?

$$P[|Z| > z] = P[Z < -z] + P[Z > z] \\ = 2P[Z > z]$$



Quindi se $z \in \mathbb{R}$ è t.c.

$$P[|Z| > z] = \alpha, \text{ allora } P[Z > z] = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow z = z_{\alpha/2}$$

Esempi $P[|Z| > z] = 0.05 \Leftrightarrow P[|Z| < z] = \underline{0.95}$

vale per $z = z_{0.025} = \underline{1.96}$

$$P[|Z| > z] = 0.10 \Leftrightarrow P[|Z| < z] = \underline{0.9} \Leftrightarrow z = z_{0.05} = \underline{1.645}$$

$$P[|Z| > z] = 0.01 \Leftrightarrow P[|Z| < z] = \underline{0.99} \Leftrightarrow z = z_{0.005} = \underline{2.576}$$