

Stimatore intervallare (intervallo di confidenza)

Definizione: Uno stimatore intervallare di un parametro di una popolazione è un **INTERVALLO** che prevediamo contenga il parametro. La **CONFIDENZA** che associamo all'intervallo è la probabilità che esso contenga il parametro.

Caso 1: campione normale con varianza **NOTA**

$X_1, \dots, X_n$ campione di $N(\mu, \sigma^2)$, μ - ignoto, σ^2 - nota,

Vogliamo determinare un intervallo di confidenza al 95%

$\bar{X}$ è stimatore puntuale di μ e sappiamo $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$

ha distribuzione normale STANDARD. Abbiamo visto che

però $z_{0.025} = 1.96$, vale $P[|Z| \leq z_{0.025}] = 0.95$

Quindi $P\left[\left|\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right| \leq 1.96\right] = 0.95$, cioè

$$P\left[|\bar{X} - \mu| \leq \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right] = 0.95$$

ovvero

$$P\left[-\frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right] = 0.95$$

due da

$$P\left[\bar{X} - \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right] = 0.95$$

Quindi il parametro μ appartiene all'intervallo
(di confidenza) $\left[\bar{X} - \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right]$ con prob. 0.95;

si usz dire che $\left[\bar{X} - \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right]$ è un intervallo di
confidenza al 95% per la media della popolazione μ .

ES: Il segnale emesso in A con intensità μ , viene misurato in B ottenendo un segnale di media μ e DS 3, (dovuto al "rumore" $\mu + z$ con $z \sim N(0, 9)$). Per ridurre l'errore, effettuiamo 10 registrazioni indipendenti che danno

17, 21, 20, 18, 19, 22, 20, 21, 16, 19

Costruire un intervallo di confidenza al 95% per μ .

Sol: $\bar{X} = \frac{17+21+\dots+16+19}{10} = 19.3$. Essendo $\sigma=3$

l'intervallo cercato è $\left[19.3 - \frac{1.96 \cdot 3}{\sqrt{10}}, 19.3 + \frac{1.96 \cdot 3}{\sqrt{10}} \right] = [17.44, 21.16]$

OSS. Su intervallo di confidenza al 90% senza

$\left[19.3 - \frac{z_{0.05} \cdot 3}{\sqrt{10}}, 19.3 + \frac{z_{0.05} \cdot 3}{\sqrt{10}} \right] = [17.74, 20.86]$ ($z_{0.05} = 1.64$)

al 99% $\left[19.3 - \frac{z_{0.005} \cdot 3}{\sqrt{10}}, 19.3 + \frac{z_{0.005} \cdot 3}{\sqrt{10}} \right] = [16.86, 21.74]$

$z_{0.005} = 2.576$

(2)

All' aumentare di n , l'intervallo di confidenza si
rimpicciolisce $(95\%, [\bar{X} - \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}])$

Supponiamo di voler risolvere il seguente problema:
quanto dovrà essere grande il campione per ottenere
un intervallo di confidenza al 95% di ampiezza minore di b ?

$$\text{Lunghezza } [\bar{X} - \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}] = 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3.92 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{quindi se decidiamo } \frac{3.92 \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \leq b \Rightarrow \sqrt{n} \geq \frac{3.92 \cdot \sigma}{b}$$

$$\Rightarrow n \geq \left(\frac{3.92 \cdot \sigma}{b} \right)^2$$

Esempio Se la deviazione stand. di una popolazione
è $\sigma = 2$, per determinare un intervallo di confidenza
al 95% dell' media μ di ampiezza minore di 0.1,
la numerosità del campione dovrà essere

$$n \geq \left(\frac{3.92 \cdot 2}{0.1} \right)^2 = (78.4)^2 = 6146,6$$

Se l'ampiezza fosse 0.01

$$n \geq \left(\frac{3.92 \cdot 2}{0.01} \right)^2 = (784)^2 = 614656$$