

Stimatore Intervallare dell' media μ

Caso 2: campione normale con varianze ignote

$X_1, \dots, X_n$ campione proveniente da una popolazione normale di cui sia la media μ , sia la varianza σ^2 siano ignote.

Nel caso in cui σ^2 è noto, abbiamo ottenuto l'intervallo di confidenza per μ , definendo

$$Z = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

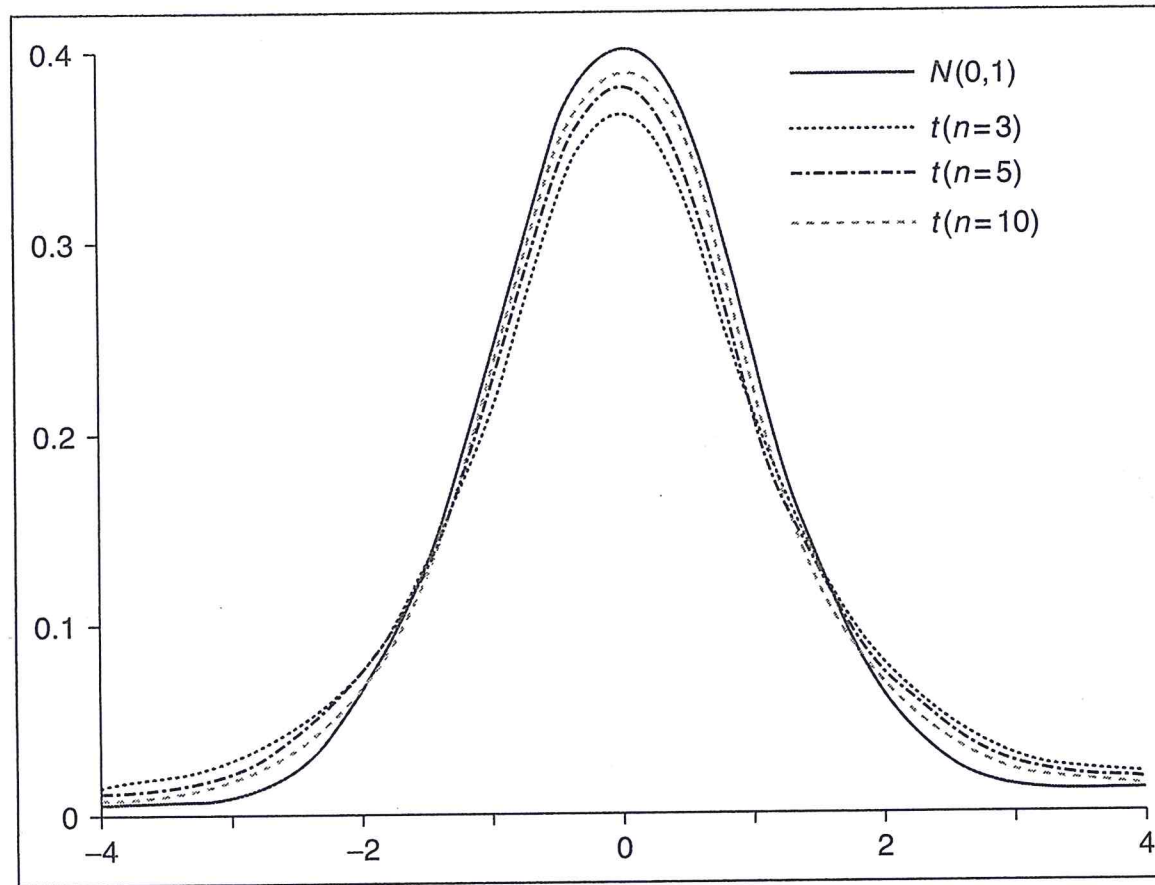
dove Z ha distribuzione normale standard.

Se però σ è ignota, è naturale sostituirlo
nella precedente formula con il suo stimatore
 S , dove ricordiamo $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$.

Otteniamo quindi una nuova variabile aleatoria

$$T_{n-1} := \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S}$$

La variabile aleatoria T_{n-1} è detta variabile
aleatoria t di Student con $n-1$ gradi
di libertà.



Distribuzione Normale Standard ($N(0,1)$)
e distribuzione t ($n=3, 5, 10$)

Osservazione: Le variabili t di Student sono simmetriche rispetto all'origine. Hanno un aspetto simile alla normale standard, ma presentano una dispersione maggiore e quindi "code più pesanti". All'aumentare di n , diventano via via più simili alla normale standard.

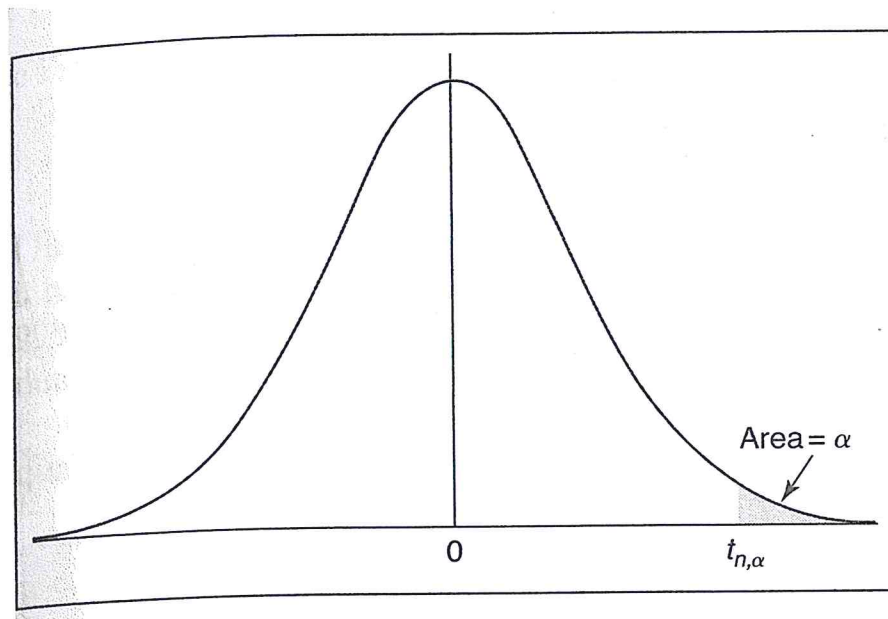
Percentili di T_m .

Come per la normale standard, definiremo il $100(1-\alpha)$ percentile di T_m , il valore $t_{m,\alpha}$ per il quale

$$P[T_m > t_{m,\alpha}] = \alpha$$

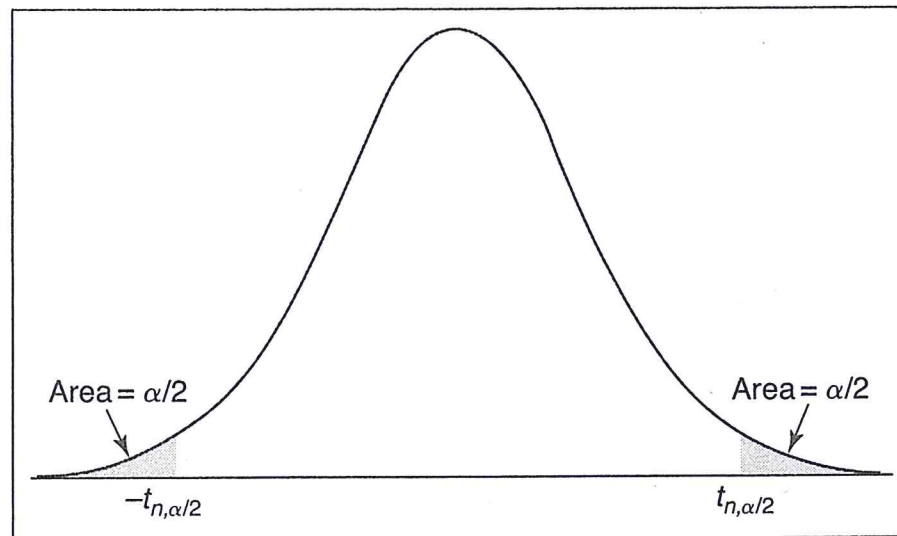
Per esempio: il valore $t_{m,0.05}$ sarà il 95-esimo percentile della t di Student a m gradi di libertà e varrà

$$P[T_m < t_{m,0.05}] = 0.95$$



Percentile della
densità t :

$$P[T_n > t_{n,\alpha}] = \alpha$$



$$P[|T_n| \leq t_{n,\frac{\alpha}{2}}]$$

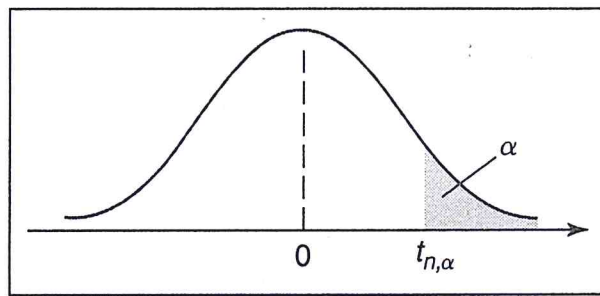
$$= P[-t_{n,\frac{\alpha}{2}} \leq T_n \leq t_{n,\frac{\alpha}{2}}]$$

$$= 1 - \alpha$$

Per determinare i percentili useremo la tabella che segue.

Per esempio per trovare $t_{8,0.05}$ (il 95-esimo percentile della t di Student a 8 gradi di libertà) cercheremo sulla tabella il valore che sulla riga 8 corrisponde alla colonna $\alpha=0.05$.

$$t_{8,0.05} = 1.860$$



3

n	α									
	0.40	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	318.31	636.62
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	23.326	31.598
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.213	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.255	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
60	0.254	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

3