

Allora, se abbiamo che

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim T_{n-1}$$

otteniamo

$$P\left[\sqrt{n} \frac{|\bar{X} - \mu|}{S} \leq t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

ovvero

$$P\left[\bar{X} - t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

Quindi: un intervallo di confidenza al $100(1-\alpha)\%$
($\alpha = 0,1 \rightarrow 90\%$; $\alpha = 0,05 \rightarrow 95\%$; $\alpha = 0,01 \rightarrow 99\%$)
per la media μ è dato da

$$\left[\bar{X} - t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

Esempio: Studiamo il contenuto di PBC nel latte materno. In un campione di 20 madri, le concentrazioni sono

16, 0, 0, 2, 3, 6, 8, 2, 5, 0, 12, 10, 5, 7, 2, 3, 8, 17, 9, 1

Usare questo dato per ottenere

- (i) un intervallo di confidenza al 95%;
- (ii) un intervallo di confidenza al 99%

Soluzioni: otteniamo $\bar{X} = \frac{16+0+\dots+9+1}{20} = 5,8$,

$$S = \sqrt{\frac{(16-5,8)^2 + (0-5,8)^2 + \dots + (9-5,8)^2 + (1-5,8)^2}{19}} = 5,085$$

Visto che $100(1-\alpha) = 0,95$ se $\alpha = 0,05$ e
 $100(1-\alpha) = 0,99$ se $\alpha = 0,01$

i valori che ci serve calcolare sono

$$t_{n-1, \alpha/2} = t_{19, 0,025} = 2,093$$

$$t_{n-1, \alpha/2} = t_{19, 0,005} = 2,861$$

Un intervallo di confidenza al 95% per μ sarà

$$\left[\bar{X} - t_{19,0.025} \frac{S}{\sqrt{20}}, \bar{X} + t_{19,0.025} \frac{S}{\sqrt{20}} \right]$$
$$= [5.8 - 2.38, 5.8 + 2.38]$$

mentre uno al 99% sarà

$$\left[5.8 - 2.861 \cdot \frac{5.085}{\sqrt{20}}, 5.8 + 2.861 \cdot \frac{5.085}{\sqrt{20}} \right]$$
$$= [5.8 - 3.25, 5.8 + 3.25]$$