

① Verifica di ipotesi sulla media di una
popolazione normale: caso di varianza nota

Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione normale con μ ignoto e σ^2 nota.

Vogliamo verificare l'ipotesi nulla

$$H_0: \mu = \mu_0$$

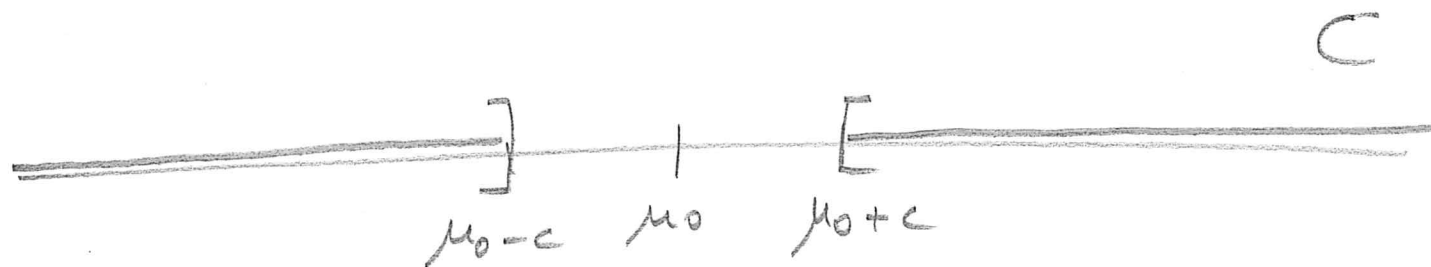
contro l'ipotesi alternativa

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

Visto che lo stimatore naturale della media μ è $\bar{X}$,
potrebbe essere ragionevole rifiutare l'ipotesi che $\mu = \mu_0$
quando $\bar{X}$ è lontano da μ_0 .

Questo significa che la regione critica del test dovrebbe avere la forma

$$C := \{X_1, \dots, X_n : |\bar{X} - \mu_0| \geq c\}$$



per un opportuno valore di c .

Supponiamo di volere che il test abbia un livello di significatività α . In questo caso dovrebbe valere

→
$$P[|\bar{X} - \mu_0| \geq c] = \alpha \quad \text{quando } \mu = \mu_0$$

Quando $\mu = \mu_0$, $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$ e come
abbiamo visto già varie volte

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X} - \mu_0) \sim N(0,1).$$

Quindi la disuguaglianza

$$|\bar{X} - \mu_0| \geq c$$

equivale a

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| = Z \geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma} c$$

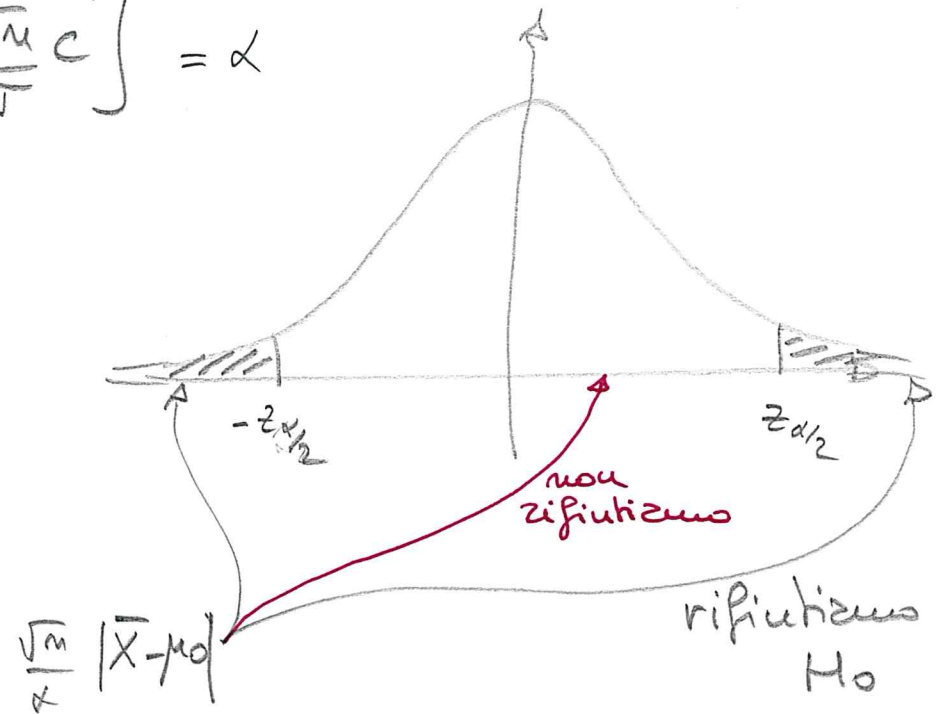
Perciò

$$P[|\bar{X} - \mu_0| \geq c] = P[|Z| \geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma} c] = \alpha$$

$$\Rightarrow P[Z \geq \frac{\sqrt{n}}{\sigma} c] = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sigma} c = z_{\alpha/2}$$

$$\Rightarrow c = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



Riassumendo:

Rifiutiamo H_0 se $\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| \geq z_{\alpha/2}$

Non rifiutiamo H_0 altrimenti.

con livello di significatività α .

Esempio 1

A emette un segnale di intensità μ , che in B viene registrato come una v.a. di media μ e varianza $\sigma^2 = 16$. Si suppone che $\mu = 10$. Verificare se questa ipotesi è plausibile avendo ricevuto 20 segnali (indip.) con valore medio osservato 11.6. (Usando un livello $\alpha = 0.05$).

Sol.

$$H_0: \mu = \mu_0 = 10$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

Calcoliamo la statistica $\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{20}}{4} |11.6 - 10| = 1.79$

essendo $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$

l'ipotesi nulla NON viene rifiutata.



Il motivo è che, se $\mu = \mu_0$, $\bar{X}$ si discosta per più del 5% dei casi di 10.

Tuttavia, se avessimo scelto un livello $\alpha = 0,1$,

$$\alpha/2 = 0,05 \Rightarrow Z_{0,05} = 1,645 \quad \text{avremmo rifiutato}$$

H_0 (con un maggiore livello di significatività)

Valore p - p-value



Possiamo procedere in maniera inversa:

fissata l'ipotesi nulla $H_0: \mu = \mu_0$, determiniamo il valore n dello statistico del test e

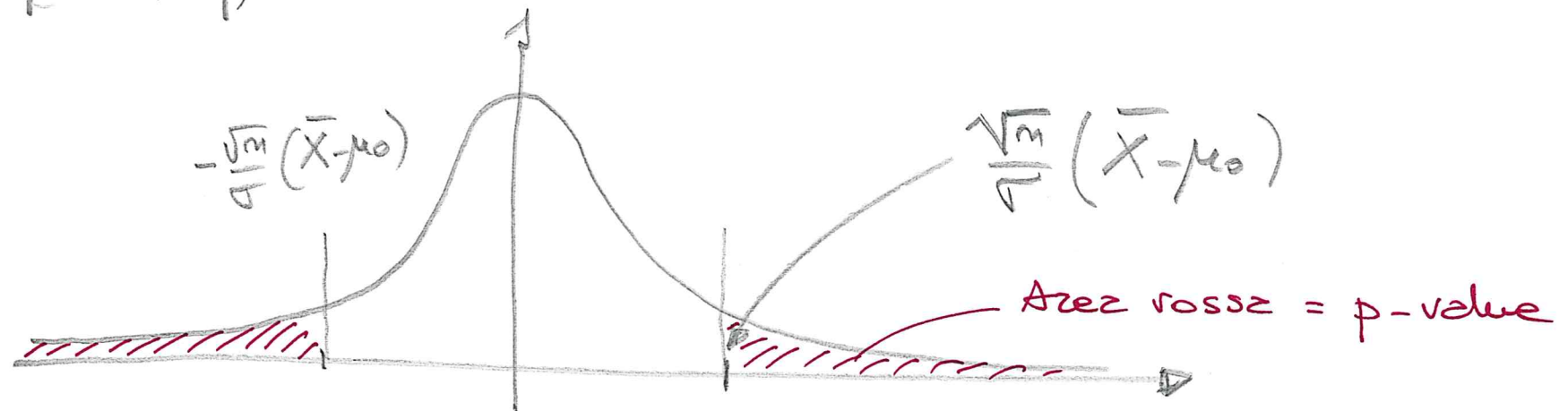
poi la probabilità che il valore assoluto della normale standard sia maggiore di $|t|$.

Questa probabilità, detto p-value, è detto

livello di significatività osservato nel senso

che H_0 viene rifiutata se il p-value è minore o uguale al livello di significatività

$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0|$, mentre altrimenti non viene rifiutata.



Riassumendo

Il p -value è il più piccolo livello di significatività a cui i dati portano al rifiuto dell'ipotesi nulla.

Un piccolo p -value (per esempio 0.05) è un forte indicatore che l'ipotesi nulla non sia vera.