

Esempio Supponiamo ora che 20 osservazioni di $N(\mu, 16)$ abbiano dato $\bar{X} = 10.8$. In questo caso la statistica del test

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{20}}{4} |10.8 - 10| = 0.894.$$

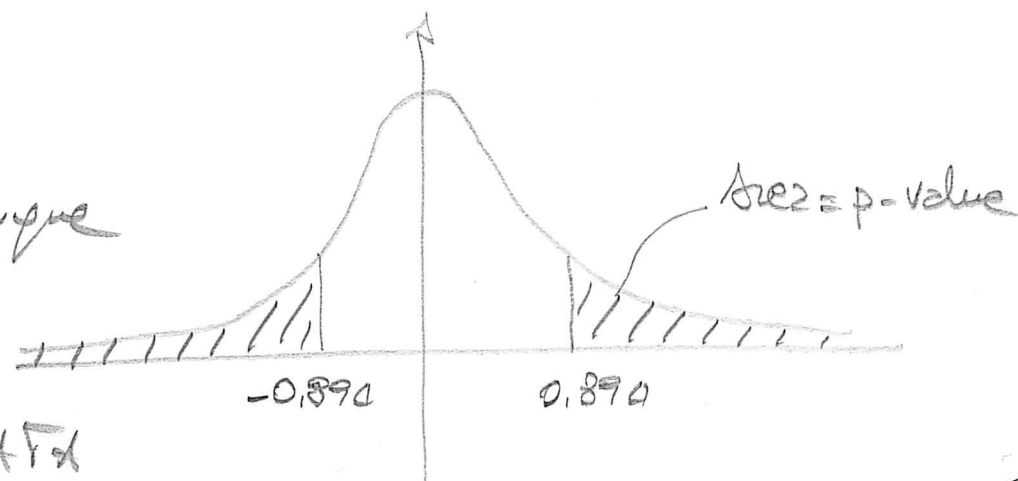
Visto che

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[|Z| \geq 0.894] &= 2 \cdot \mathbb{P}[Z \geq 0.894] \\ &= 2(1 - \mathbb{P}[Z < 0.894]) \\ &\approx 2 - 2 \cdot 0.8133 = 0.374 \end{aligned}$$

otteniamo che $p\text{-value} = 0.374$ (ALTO)

Di conseguenza, l'ipotesi nulla non verrà rifiutata a qualunque livello minore di 0.374.

In pratica, NON VERRÀ RIFIUTATA



Se invece $\bar{X}$ fosse stato 7.8, allora

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{10}}{4} (2.2) = 2.46$$

$$\begin{aligned} \text{e quindi il p-value} &= \mathbb{P}[|Z| \geq 2.46] \\ &= 2 \mathbb{P}[Z \geq 2.46] \\ &= 2 (1 - \mathbb{P}[Z \leq 2.46]) \\ &= 2 (1 - \Phi(2.46)) \approx 0.014 \end{aligned}$$

è ora molto plausibile RIFIUTARE H_0 (perché
nel farlo si commette al più un errore di
probabilità pari a 0.014).

Esempio: Per verificare l'ipotesi

$$H_0: \mu = 105$$

contro

$$H_1: \mu \neq 105$$

viene scelto un campione di numerosità $n=9$, se la media campionaria è $\bar{X}=100$, calcolare il p-value se

$$(a) \cdot \sigma = 5, \quad (b) \sigma = 10, \quad (c) \sigma = 15.$$

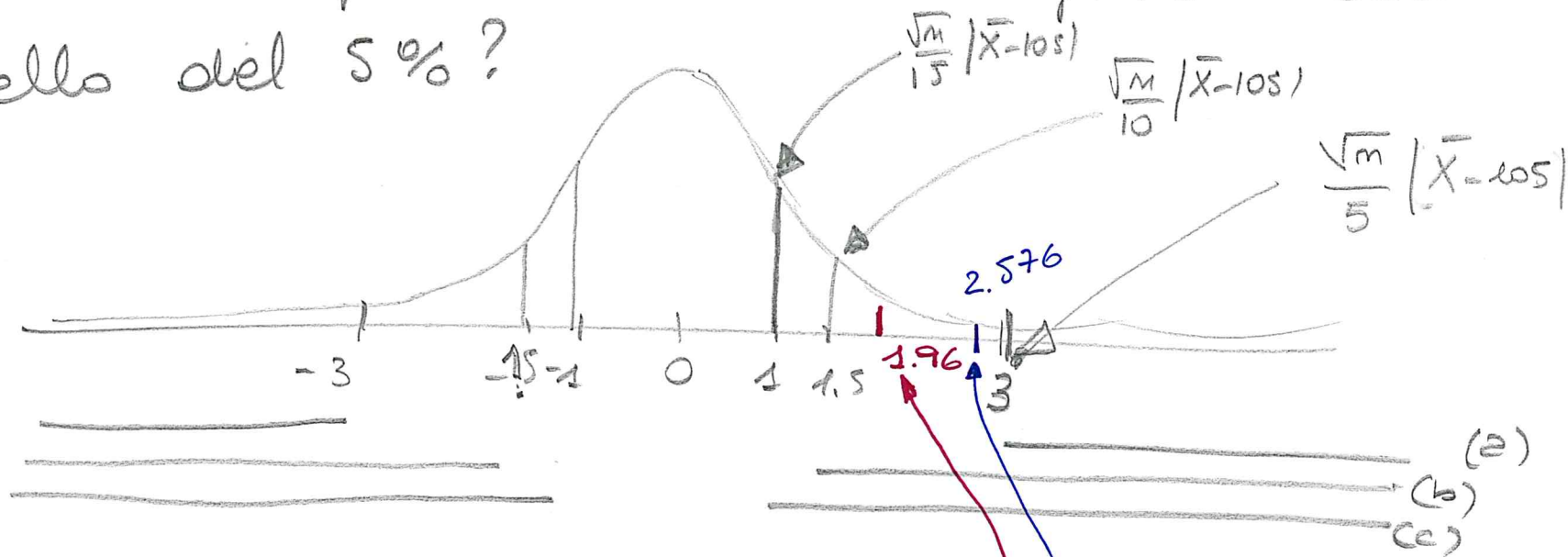
$$(a): \quad \frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{9}}{5} |100 - 105| = \frac{3}{5} |-5| = 3$$

$$\begin{aligned} \text{p-value} &= P[|Z| \geq 3] = 2(1 - P[|Z| < 3]) = \\ &= 2(1 - 0.9987) = \boxed{0.0026} \end{aligned}$$

$$(b) \quad \frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| = \frac{3}{10} |-5| = 1.5 \quad \Rightarrow \quad \text{p-value} = P[|Z| \geq 1.5] = \boxed{0.1336}$$

$$(c) \quad \frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| = \frac{3}{15} |-5| = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{p-value} = P[|Z| \geq 1] = \boxed{0.3174}$$

In quali casi l'ipotesi nulla viene rifiutata con un livello del 5%?



$$\alpha = 5\% \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow z_{0.025} = 1.960$$

Viene rifiutata in (a), non rifiutata in (b), (c)

$$\alpha = 1\% \Rightarrow \alpha/2 = 0.005 \Rightarrow z_{0.005} = 2.576$$

Viene rifiutata in (a), non rifiutata in (b), (c)

Esempio

Lanciamo 50 volte una moneta ottenendo
29 volte "testa". Possiamo affermare che
la moneta è truccata?

$X_1, \dots, X_{50}$ campione

$$E[X_1] = p$$

$$X_i \sim \text{Bi}(1, p)$$

$$\text{Var}[X_1] = p(1-p), \text{DS}[X_1] = \sqrt{p(1-p)}$$

$$\mu_0 = \frac{1}{2}$$

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

(sotto H_0 , anche
la varianza è determi-
nata e pari a $\frac{1}{4}$)

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1}} \cdot |\bar{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{50}}{\frac{1}{2}} \cdot \left| \frac{29}{50} - \frac{1}{2} \right| = 1.131$$

p-value

$$\begin{aligned} P[|Z| \geq 1.131] &= 2(1 - P[Z \leq 1.131]) \approx 2(1 - 0.9049) \\ &= 0.1902 \end{aligned}$$

Se avessimo ottenuto 35 volte test?

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{50}}{1/2} \left| \frac{35}{50} - \frac{1}{2} \right| = 2.828$$

p-value $\mathbb{P}[|Z| \geq 2.828] = 2(1 - \mathbb{P}[Z < 2.828])$
 $\approx 2(1 - 0.9976) = 0.0048$

Nel caso di 40 test

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{50}}{1/2} \left| \frac{40}{50} - \frac{1}{2} \right| = 4.242$$

p-value $\mathbb{P}[|Z| \geq 4.242] \approx 0$