

VERIFICA IPOTESI (2)

Vogliamo testare se un parametro di una certa distribuzione vale un valore definito μ_0 .

$H_0: \mu = \mu_0$ ipotesi nulla

$H_1: \mu \neq \mu_0$ ipotesi alternativa

Supponiamo ora di avere un campione $X_1, \dots, X_n$ e una statistica di μ definita in base al campione.

Per esempio, se $\mu = E[X_1]$, $ST = \bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$

Fissiamo quindi un sottoinsieme C di $\mathbb{R}$ che definiremo REGIONE CRITICA tale che

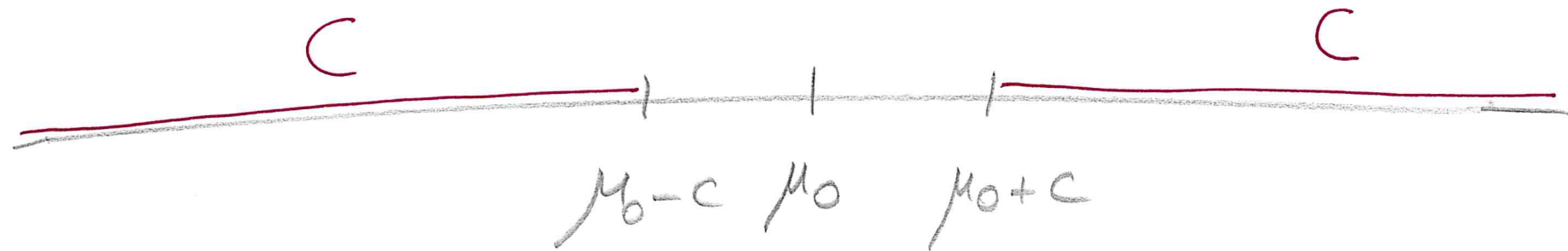
Se $\bar{X} \in C$ rifiutiamo H_0

Se $\bar{X} \notin C$ non rifiutiamo H_0

Una scelta per C può essere

$$C := \{x : |x - \mu_0| > c\}$$

ovvero



Ora, per valutare se la regione critica è stata scelta "bene", valutiamo il livello di significatività α .

Esso è definito così:

$$\alpha := P[ST \in C]$$

sotto l'ipotesi
che H_0 è vera,
cioè $\mu = \mu_0$

α è la probabilità che ST cada
nella regione critica (e quindi ci farò
affermare che H_0 è **falsa**) nel
caso in cui H_0 fosse **vera**. È perciò la
probabilità di rifiutare H_0 quando
invece H_0 è vera.

① Popolazione normale con σ noto: test su media

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$ST = \bar{X} = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n)$$

Regione critica:

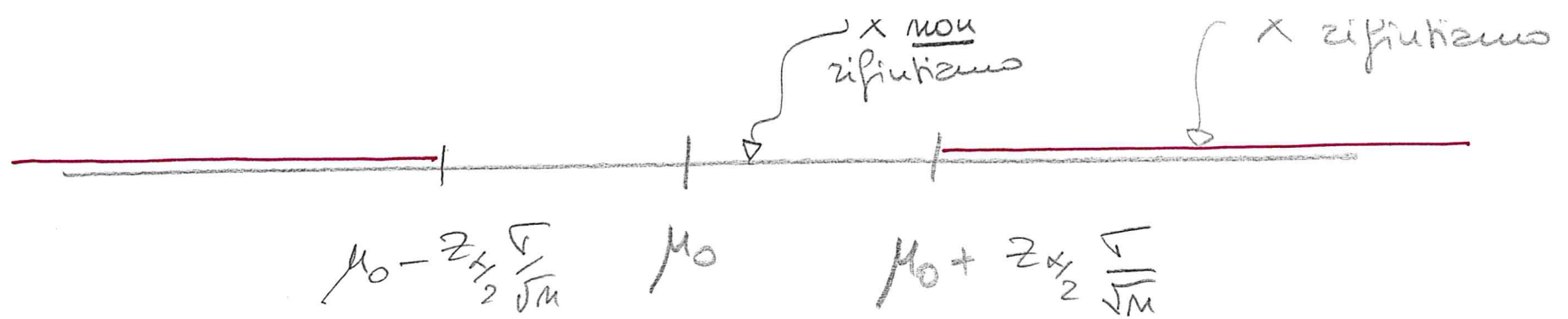
$$C = \{x: |x - \mu_0| \geq c\}$$

C sarà di livello $\alpha \Leftrightarrow P[\bar{X} \in C] = \alpha$

$$\Leftrightarrow P[|\bar{X} - \mu_0| \geq c] = \alpha \Leftrightarrow P\left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - \mu_0| \geq \frac{\sqrt{n}c}{\sigma}\right] = \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left[|Z| \geq \frac{\sqrt{n}c}{\sigma}\right] = \alpha \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}c}{\sigma} = z_{\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \boxed{C = \left\{ \bar{X} : |\bar{X} - \mu_0| \geq \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}} \right\}}$$

(4)



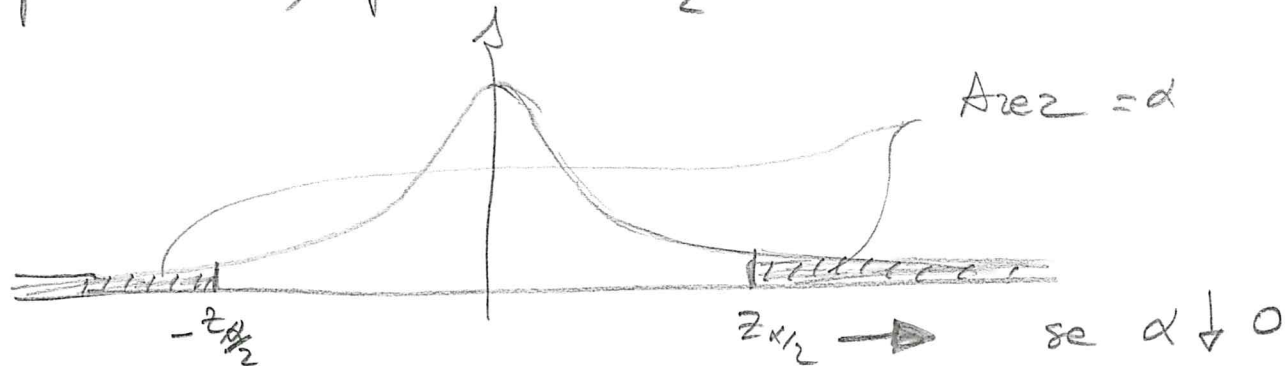
Rifiuteremo H_0 con un livello di significatività

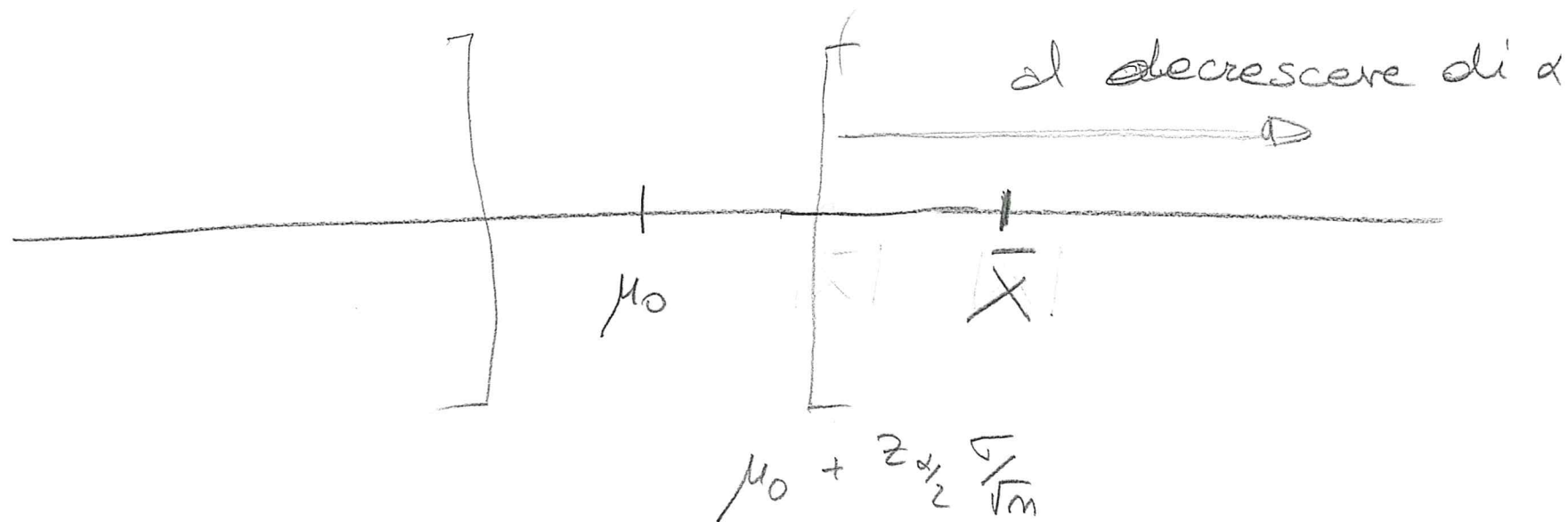
α fissato, se $|\bar{X}| \geq \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ o $\bar{X} \leq \mu_0 - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

che è equivalente, se $\boxed{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} |\bar{X} - \mu_0| \geq z_{\alpha/2}}$

Al variare di α , cambia la regione critica:

più α è piccolo, più $z_{\alpha/2}$ cresce





Quindi è fatto di prendere α sufficientemente piccolo, X è un certo punto non cade più nella regione critica e quindi non rifiuteremo più H_0 .
 Il minimo valore che ci farà ancora rifiutare H_0 lo chiameremo p-value.

Quindi, detto $\mu = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X} - \mu_0)$

$$\text{p-value} = \mathbb{P}[|Z| \geq |\mu|]$$

operativamente: calcoliamo μ ,

e troviamo sulle tabelle

$$\mathbb{P}[Z \leq |\mu|] = \beta$$

da cui ricaviamo $\boxed{\text{p-value} = 2(1 - \beta)}$.