Lezione 30/11

Esercizio 1: Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 \neq 0\}$. Sia ω la forma differenziale definita in A da

$$\omega(x, y, z) = z^2\sqrt{x^4 + y^2}\left(1 + \frac{\alpha x^4}{x^4 + y^2}\right) dx + \beta\frac{xyz^2}{\sqrt{x^4 + y^2}}\, dy + 2xz^\gamma\sqrt{x^4 + y^2}\, dz$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ e $\gamma \in \mathbb{R}^+$.

(i) Determinare per quali valori di α, β, γ ω è esatta.

(ii) Per i valori dei parametri trovati in (i) si calcoli una primitiva U di ω in A.

Soluzione: Si noti che A coincide con $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$, dunque non è semplicemente connesso (più in generale, $\mathbb{R}^3 \setminus r$ dove r è una retta, non risulta semplicemente connesso, infatti tutti i circuiti che allacciano la retta r non si possono deformare omotopicamente ad un punto). Andiamo a verificare la condizione di chiusura per ω. Dobbiamo imporre che

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial y} = \frac{\partial\omega_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial_z} = \frac{\partial\omega_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial\omega_2}{\partial z} = \frac{\partial\omega_3}{\partial y}.$$

Calcolando tutte le derivate parziali richieste otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{yz^2}{\sqrt{x^4+y^2}} - \alpha\frac{x^4yz^2}{(x^4+y^2)^{3/2}} = \beta\frac{yz^2}{\sqrt{x^4+y^2}} - 2\beta\frac{x^4yz^2}{(x^4+y^2)^{3/2}} \\ 2z\sqrt{x^4 + y^2}\left(1 + \frac{\alpha x^4}{x^4+y^2}\right) = 2z^\gamma\sqrt{x^4 + y^2} + \frac{4x^4z^\gamma}{\sqrt{x^4+y^2}} \\ \frac{2\beta xyz}{\sqrt{x^4+y^2}} = 2xz^\gamma\frac{y}{\sqrt{x^4+y^2}} \end{cases}$$

Dalla terza equazione, supponendo $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ otteniamo

$$\beta z = z^\gamma$$

Ponendo $z = 1$, si ha $\beta = 1$. D'altra parte da $z = z^\gamma$ si deduce che $1 = z^{\gamma-1}$ e quindi $\gamma = 1$.
Si noti anche che se fosse $\gamma \neq 1$ si avrebbe

$$\frac{2xyz}{\sqrt{x^4 + y^2}} = 2xz^\gamma\frac{y}{\sqrt{x^4 + y^2}}$$

per ogni $(x, y, z) \in A$, da cui

$$2xy(z - z^\gamma) = 0$$

per ogni $(x, y, z) \in A$. Se $\gamma \neq 1$, $(z - z^\gamma) \neq 0$ per $z \neq 0$ dunque per tali valori ottengo $xy = 0$ per ogni $(x, y) \in A$, che è assurdo. Analogamente $\beta = 1$ è l'unico valore che rende vera l'equazione per ogni $(x, y, z) \in A$.
Sostituendo $(\beta, \gamma) = (1, 1)$ nella seconda equazione si ricava infine $(2\alpha - 4)x^4 = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dunque $\alpha = 2$ è l'unico valore ammissibile per α.Ne deduciamo che $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 1, 1)$ è l'unica terna che rende la forma ω chiusa.

Questo implica che ω *può* essere esatta se $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 1, 1)$, ma non possiamo dedurlo dalla condizione di chiusura dato che A non è semplicemente connesso.
Dimostriamo che per $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 1, 1)$, ω è esatta utilizzando la definizione. Dobbiamo trovare

una primitiva per ω in A. Dobbiamo cioè individuare una funzione $U \in C^1(A)$ tale che $dU = \omega$, o più esplicitamente

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \omega_1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \omega_2, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \omega_3.$$

Dato che $\omega_3 = 2xz\sqrt{x^4 + y^2}$, abbiamo che una candidata primitiva U deve essere

$$\int \omega_3 \, dz = \int 2xz\sqrt{x^4 + y^2} \, dz = x\sqrt{x^4 + y^2} \int 2zdz = xz^2\sqrt{x^4 + y^2} + \Phi(x, y) =: U(x, y, z)$$

dove Φ è una funzione di classe C^1 nelle variabili x, y, da determinarsi. Per identificare Φ ragiono nel modo seguente. Dato che deve essere

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \omega_1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \omega_2,$$

ottengo che

$$z^2\sqrt{x^4 + y^2}\left(1 + \frac{2x^4}{x^4 + y^2}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \omega_1$$

e

$$\frac{xyz^2}{\sqrt{x^4 + y^2}} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \omega_2$$

da cui

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0.$$

Dunque la funzione Φ risulta essere costante. A questo punto possiamo concludere che per $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 1, 1)$ ω è esatta, ed una sua primitiva in A è data da

$$U(x, y, z) = xz^2\sqrt{x^4 + y^2}.$$

Esercizio 2: Risolvere la seguente equazione differenziale non omogenea del terzo ordine a coefficienti costanti:

$$y''' + 2y'' + 2y' = e^{-x} \cos x$$

Esprimere l'integrale generale dell'equazione come insieme di soluzioni al variare di appropriati coefficienti reali.