CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, AMBIENTE - TERRITORIO
Padova 10-06-09
III prova parziale
TEMA n.1

Parte 1. Quesiti preliminari.
Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata). Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato.

1. La matrice a coefficienti reali $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è simmetrica per ogni $\lambda \in I\!R$.
2. Ogni retta è parallela a se stessa.
3. Esistono piani nello spazio reale $I\!R^3$ che sono ortogonali a se stessi.

Parte 2. Esercizi.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

1. Si consideri la matrice A_λ considerata sopra.
   (a) Si dica per quali (o per quale) λ la matrice A_λ è simmetrica.
   (b) Se λ_1 è uno dei valori di λ trovati in (a), si calcoli una base di $I\!R^4$ formata da autovettori di A_{λ_1} ed una matrice H tale che ${}^tHA_{\lambda_1}H$ sia diagonale.
   (c) Ortonormalizzare con Gram-Schmidt la base
   $$B = ((-1,0,0,1),(-1,-1,1,1),(0,1,1,0),(1,1,1,1))$$
   di $I\!R^4$.
   (d) Scrivere $(1,0,1,0)$ come somma di autovettori di A_{λ_1}.
   (e) (Facoltativo) Trovare gli autovalori complessi della matrice a coefficienti complessi $A' = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & i \\ 0 & i & i & 0 \\ 0 & i & i & 0 \\ i & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$, dove $i^2 = -1$.

2. Nello spazio $I\!R^3$ consideriamo le due rette:

$$r : \begin{cases} x = \ \ t \\ y = \ \ t + 2 \\ z = 2t \end{cases} \quad , \qquad s : \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases} .$$

(a) Determinare i punti di minima distanza $P \in r$ e $Q \in s$ delle due rette.

(b) Le due rette sono sghembe?

(c) Le tre rette r, s e la retta PQ sono ortogonali a due a due?

(d) Tra tutti i punti dello spazio che sono equidistanti da r ed s ne esiste uno ed uno solo che ha la minima equidistanza. Dimostrare che tale punto è $C = (-1/2, 3/2, 1/2)$.

(e) Si dica se esiste una sfera di centro C tangente alle due rette r ed s. Se la risposta è positiva, si calcoli esplicitamente il raggio di una tale sfera.

(f) Dimostrare che esiste un unico piano che ha uguale distanza positiva da entrambe le rette r ed s e determinarlo.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, AMBIENTE - TERRITORIO
Padova 10-06-09
III prova parziale
TEMA n.2

Parte 1. Quesiti preliminari.
Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata). Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato.

1. La matrice a coefficienti reali $A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è simmetrica per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Esistono rette nello spazio $\mathbb{R}^3$ che sono ortogonali a se stesse.
3. Ogni piano nello spazio reale $\mathbb{R}^3$ è parallelo a se stesso.

Parte 2. Esercizi.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

1. Si consideri la matrice A_λ considerata sopra.
   (a) Si dica per quali (o per quale) λ la matrice A_λ è simmetrica.
   (b) Se λ_1 è uno dei valori di λ trovati in (a), si calcoli una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A_{λ_1} ed una matrice H tale che ${}^tHA_{\lambda_1}H$ sia diagonale.
   (c) Ortonormalizzare con Gram-Schmidt la base
   $$B = ((-1,0,0,1),(-1,-1,1,1),(1,1,1,1),(1,-1,-1,1))$$
   di $\mathbb{R}^4$.
   (d) Scrivere $(1,0,1,0)$ come somma di autovettori di A_{λ_1}.
   (e) (Facoltativo) Trovare gli autovalori complessi della matrice a coefficienti complessi $A' = \begin{pmatrix} 0 & i & i & 0 \\ i & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix}$, dove $i^2 = -1$.

2. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ consideriamo le due rette:

$$r : \begin{cases} x = -t \\ y = -t + 2 \\ z = -2t \end{cases} , \quad s : \begin{cases} z - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} .$$

(a) Determinare i punti di minima distanza $P \in r$ e $Q \in s$ delle due rette.

(b) Le due rette sono sghembe?

(c) Le tre rette r, s e la retta PQ sono ortogonali a due a due?

(d) Tra tutti i punti dello spazio che sono equidistanti da r ed s ne esiste uno ed uno solo che ha la minima equidistanza. Dimostrare che tale punto è $C = (-1/2, 3/2, 1/2)$.

(e) Si dica se esiste una sfera di centro C tangente alle due rette r ed s. Se la risposta è positiva, si calcoli esplicitamente il raggio di una tale sfera.

(f) Dimostrare che esiste un unico piano che ha uguale distanza positiva da entrambe le rette r ed s e determinarlo.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, AMBIENTE - TERRITORIO
Padova 10-06-09
III prova parziale
TEMA n.3

Parte 1. Quesiti preliminari.
Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata). Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato.

1. La matrice a coefficienti reali $A_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ è simmetrica per ogni $\lambda \in I\!R$.
2. Non ogni retta è parallela a se stessa.
3. Esistono piani nello spazio reale $I\!R^3$ che sono ortogonali a se stessi.

Parte 2. Esercizi.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

1. Si consideri la matrice A_λ considerata sopra.
   (a) Si dica per quali (o per quale) λ la matrice A_λ è simmetrica.
   (b) Se λ_1 è uno dei valori di λ trovati in (a), si calcoli una base di $I\!R^4$ formata da autovettori di A_{λ_1} ed una matrice H tale che ${}^tHA_{\lambda_1}H$ sia diagonale.
   (c) Ortonormalizzare con Gram-Schmidt la base
   $$B = ((-1,0,0,1),(-1,-1,1,1),(0,1,1,0),(1,1,1,1))$$
   di $I\!R^4$.
   (d) Scrivere $(1,0,1,0)$ come somma di autovettori di A_{λ_1}.
   (e) (Facoltativo) Trovare gli autovalori complessi della matrice a coefficienti complessi $A' = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & -i & 0 \\ 0 & -i & -i & 0 \\ -i & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$, dove $i^2 = -1$.

2. Nello spazio $I\!R^3$ consideriamo le due rette:

$$r : \begin{cases} x = \quad t \\ y = \quad t + 2 \\ z = 2t \end{cases} , \quad s : \begin{cases} -x - y = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} .$$

(a) Determinare i punti di minima distanza $P \in r$ e $Q \in s$ delle due rette.

(b) Le due rette sono sghembe?

(c) Le tre rette r, s e la retta PQ sono ortogonali a due a due?

(d) Tra tutti i punti dello spazio che sono equidistanti da r ed s ne esiste uno ed uno solo che ha la minima equidistanza. Dimostrare che tale punto è $C = (-1/2, 3/2, 1/2)$.

(e) Si dica se esiste una sfera di centro C tangente alle due rette r ed s. Se la risposta è positiva, si calcoli esplicitamente il raggio di una tale sfera.

(f) Dimostrare che esiste un unico piano che ha uguale distanza positiva da entrambe le rette r ed s e determinarlo.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, AMBIENTE - TERRITORIO
Padova 10-06-09
III prova parziale
TEMA n.4

Parte 1. Quesiti preliminari.
Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata). Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato.

1. La matrice a coefficienti reali $A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ è simmetrica per ogni $\lambda \in I\!R$.
2. Esistono rette nello spazio $I\!R^3$ che sono ortogonali a se stesse.
3. Ogni piano nello spazio reale $I\!R^3$ è parallelo a se stesso.

Parte 2. Esercizi.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

1. Si consideri la matrice A_λ considerata sopra.
   (a) Si dica per quali (o per quale) λ la matrice A_λ è simmetrica.
   (b) Se λ_1 è uno dei valori di λ trovati in (a), si calcoli una base di $I\!R^4$ formata da autovettori di A_{λ_1} ed una matrice H tale che ${}^tHA_{\lambda_1}H$ sia diagonale.
   (c) Ortonormalizzare con Gram-Schmidt la base
   $$B = ((-1,0,0,1),(-1,-1,1,1),(1,1,1,1),(1,-1,-1,1))$$
   di $I\!R^4$.
   (d) Scrivere $(1,0,1,0)$ come somma di autovettori di A_{λ_1}.
   (e) (Facoltativo) Trovare gli autovalori complessi della matrice a coefficienti complessi $A' = \begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ -i & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & -i & 0 \end{pmatrix}$, dove $i^2 = -1$.

2. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ consideriamo le due rette:

$$r : \begin{cases} x = & -t \\ y = & -t + 2 \\ z = & -2t \end{cases} \quad , \qquad s : \begin{cases} z - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad .$$

(a) Determinare i punti di minima distanza $P \in r$ e $Q \in s$ delle due rette.

(b) Le due rette sono sghembe?

(c) Le tre rette r, s e la retta PQ sono ortogonali a due a due?

(d) Tra tutti i punti dello spazio che sono equidistanti da r ed s ne esiste uno ed uno solo che ha la minima equidistanza. Dimostrare che tale punto è $C = (-1/2, 3/2, 1/2)$.

(e) Si dica se esiste una sfera di centro C tangente alle due rette r ed s. Se la risposta è positiva, si calcoli esplicitamente il raggio di una tale sfera.

(f) Dimostrare che esiste un unico piano che ha uguale distanza positiva da entrambe le rette r ed s e determinarlo.