CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, AMBIENTE - TERRITORIO

Padova 09-05-09

II prova parziale

TEMA n.1

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata). **Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato**.

a) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

b) Ogni matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con determinante diverso da zero è diagonalizzabile.

c) La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1.

a) Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, determinare l'insieme S_k delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + kx_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + (1+2k)x_3 + x_4 = k^2 - 1 \\ x_1 - x_2 + (k+2)x_3 + (k+1)x_4 = 2k^2 + 2k \end{cases}$$

b) Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni S_k precedentemente trovate è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?

Esercizio 2. Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f rispetto ad $\mathcal{E}$, base canonica di $\mathbb{R}^3$, sia la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Detto $B_k = \{(1,k,1),(0,1,k),(0,0,1)\}$. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, B_k è base di $\mathbb{R}^3$? Per tali valori trovare la matrice del cambiamento di base dalla base B_k alla base canonica e la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base B_k.

2) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base B_k nel dominio e base canonica $\mathcal{E}$ nel codominio.

3) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ nel dominio e alla base B_k nel codominio.

4) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica B_k sia nel dominio che nel codominio.

5) Per ogni base $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ dimostrare che, detta C la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{C}$ sia nel dominio che nel codominio, $C^{10} = C$.

Esercizio 3. Si considerino le matrici A_k dipendenti dal parametro reale $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 2k-6 & 1 & -3k-6 \\ -4 & -k & 5 \\ 0 & -1 & k \end{pmatrix}$$

i) Calcolare il polinomio caratteristico $P_{A_k}(t)$. (Sugg. sviluppare rispetto alla colonna con più zeri).

ii) Determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

iii) Posto $k = 3$ calcolare $(A_3)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

iv) Posto $k = -5$ determinare $H \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ matrice invertibile che diagonalizza A_{-5} (cioè tale che $D = H^{-1}A_{-5}H$ con D matrice diagonale).

Facoltativo:

v) Determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, AMBIENTE - TERRITORIO

Padova 09-05-09

II prova parziale

TEMA n.2

Parte 1. Quesiti preliminari.
Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata). **Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato**.

a) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

b) Ogni matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ di rango n è diagonalizzabile.

c) La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

Parte 2. Esercizi.
Esercizio 1.

a) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare l'insieme S_α delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + (1+\alpha)x_3 + x_4 = \alpha^2 + \alpha - 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + (2\alpha+3)x_3 + x_4 = 2\alpha^2 + 3\alpha - 2 \\ x_1 - 2x_2 + (\alpha+3)x_3 + \alpha x_4 = \alpha^2 + 4\alpha + 4 \end{cases}$$

b) Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni S_α precedentemente trovate è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?

Esercizio 2. Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f rispetto ad $\mathcal{E}$, base canonica di $\mathbb{R}^3$, sia la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Detto $B_t = \{(1, t-1, 0), (0, 1, t-1), (0, 0, 1)\}$. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$, B_t è base di $\mathbb{R}^3$? Per tali valori trovare la matrice del cambiamento di base dalla base B_t alla base canonica e la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base B_t.

2) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base B_t nel dominio e base canonica $\mathcal{E}$ nel codominio.

3) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ nel dominio e alla base B_t nel codominio.

4) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica B_t sia nel dominio che nel codominio.

5) Per ogni base $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ dimostrare che, detta C la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{C}$ sia nel dominio che nel codominio, $C^{10} = C$.

Esercizio 3. Si considerino le matrici A_β dipendenti dal parametro reale $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} -2\beta-6 & 1 & 3\beta-6 \\ -4 & \beta & 5 \\ 0 & -1 & -\beta \end{pmatrix}$$

i) Calcolare il polinomio caratteristico $P_{A_\beta}(t)$. (Sugg. sviluppare rispetto alla colonna con più zeri).

ii) Determinare per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ la matrice A_β è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

iii) Posto $\beta = 2$ calcolare $(A_2)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

iv) Posto $\beta = 3$ determinare $H \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ matrice invertibile che diagonalizza A_3 (cioè tale che $D = H^{-1}A_3H$ con D matrice diagonale).

Facoltativo:

v) Determinare per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ la matrice A_β è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, AMBIENTE - TERRITORIO

Padova 09-05-09

II prova parziale

TEMA n.3

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata). **Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato**.

a) La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

b) Ogni matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertibile è diagonalizzabile.

c) La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1.

a) Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, determinare l'insieme S_k delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - kx_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + (1-2k)x_3 + x_4 = k^2 - 1 \\ x_1 - x_2 + (2-k)x_3 + (1-k)x_4 = 2k^2 - 2k \end{cases}$$

Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni S_k precedentemente trovate è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?

Esercizio 2. Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f rispetto ad $\mathcal{E}$, base canonica di $\mathbb{R}^3$, sia la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Detto $B_s = \{(1,-s,0),(0,1,-s),(0,0,1)\}$. Per quali valori di $s \in \mathbb{R}$, B_t è base di $\mathbb{R}^3$? Per tali valori trovare la matrice del cambiamento di base dalla base B_s alla base canonica e la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base B_s.

2) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base B_s nel dominio e base canonica $\mathcal{E}$ nel codominio.

3) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ nel dominio e alla base B_s nel codominio.

4) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica B_s sia nel dominio che nel codominio.

5) Per ogni base $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ dimostrare che, detta C la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{C}$ sia nel dominio che nel codominio, $C^{10} = C$.

Esercizio 3. Si considerino le matrici A_γ dipendenti dal parametro reale $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 2-6 & 1 & -3k-6 \\ -4 & -k & 5 \\ 0 & -1 & k \end{pmatrix}$$

i) Calcolare il polinomio caratteristico $P_{A_\gamma}(t)$. (Sugg. sviluppare rispetto alla colonna con più zeri).

ii) Determinare per quali valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ la matrice A_γ è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

iii) Posto $\gamma = 2$ calcolare $(A_2)^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,.

iv) Posto $\gamma = 3$ determinare $H \in M_3(\mathbb{R})$ matrice invertibile che diagonalizza A_3 (cioè tale che $D = H^{-1}A_3H$ con D matrice diagonale).

Facoltativo:

v) Determinare per quali valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ la matrice A_γ è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, AMBIENTE - TERRITORIO
Padova 09-05-09
II prova parziale
TEMA n.4

Parte 1. Quesiti preliminari.
Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata). **Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato**.

a) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

b) Ogni matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con determinante uguale a zero è diagonalizzabile.

c) La matrice $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

Parte 2. Esercizi.
Esercizio 1.

a) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare l'insieme S_α delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + (1-\alpha)x_3 + x_4 = \alpha^2 - \alpha - 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + (3-2\alpha)x_3 + x_4 = 2\alpha^2 - 3\alpha - 2 \\ x_1 - 2x_2 + (3-\alpha)x_3 + \alpha x_4 = \alpha^2 - 4\alpha + 4 \end{cases}$$

Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni S_α precedentemente trovate è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?

Esercizio 2. Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f rispetto ad $\mathcal{E}$, base canonica di $\mathbb{R}^3$, sia la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Detto $B_h = \{(1, h+1, 0), (0, 1, h+1), (0, 0, 1)\}$. Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, B_t è base di $\mathbb{R}^3$? Per tali valori trovare la matrice del cambiamento di base dalla base B_h alla base canonica e la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base B_h.

2) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base B_h nel dominio e base canonica $\mathcal{E}$ nel codominio.

3) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ nel dominio e alla base B_h nel codominio.

4) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica B_h sia nel dominio che nel codominio.

5) Per ogni base $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ dimostrare che, detta C la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{C}$ sia nel dominio che nel codominio, $C^{10} = C$.

Esercizio 3. Si considerino le matrici A_δ dipendenti dal parametro reale $\delta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} -\delta+1 & -1 & 1-2\delta \\ \delta & 2-\delta & \delta-1 \\ 0 & 1 & \delta \end{pmatrix}$$

i) Calcolare il polinomio caratteristico $P_{A_\delta}(t)$. (Sugg. sviluppare rispetto alla colonna con più zeri).

ii) Determinare per quali valori del parametro $\delta \in \mathbb{R}$ la matrice A_δ è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

iii) Posto $\delta = 0$ calcolare $(A_0 - \mathbf{I})^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ove $\mathbf{I}$ è la matrice identità di ordine 3.

iv) Posto $\delta = -1$ determinare $H \in M_3(\mathbb{R})$ matrice invertibile che diagonalizza A_{-1} (cioè tale che $D = H^{-1}A_{-1}H$ con D matrice diagonale).

Facoltativo:

v) Determinare per quali valori del parametro $\delta \in \mathbb{R}$ la matrice A_δ è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.