CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA
LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA, AMBIENTE - TERRITORIO
Padova 16-06-09
I prova scritta
TEMA n.1

**Parte 1. Quesiti preliminari.**
Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata). Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato.

1. Siano dati due vettori non nulli $v_1$ e $v_2$ di uno spazio vettoriale $V$ sul campo $\mathbb{R}$. La somma dei due sottospazi $< v_1, v_2 >$ e $< v_1 >$ è diretta, cioè vale $< v_1, v_2 > \oplus < v_1 >$.
2. Il vettore nullo può essere autovettore di un endomorfismo.
3. Due rette ortogonali tra loro nello spazio $\mathbb{R}^3$ sono incidenti.

**Parte 2. Esercizi.**

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

1. Sia dato il sottospazio $W =< (1,1,1,1), (1,1,0,0) >$ di $\mathbb{R}^4$ e i vettori $v_1 = (2,2,3,3)$, $v_2 = (0,1,1,0)$, $v_3 = (1,-1,0,1)$.
   (a) Si dicano quali tra i vettori $v_i$ con $i \in \{1,2,3\}$ verificano
   $$\dim_{\mathbb{R}}(W+ < v_i >) = 2.$$
   (b) Si dicano quali tra i tre vettori sono in somma diretta con $W$, cioè verificano
   $$W \oplus < v_j > .$$
   (c) Determinare base e dimensione dell'intersezione $(W+ < v_1 >) \cap (W+ < v_2 >)$.
   (d) Determinare base e dimensione di $(W+ < v_2 >) + (W+ < v_3 >)$.

2. (a) Determinare un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, scrivendo esplicitamente $L((x, y, z))$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tale che $\mathrm{Ker}(L) = <(1, 1, 1)>$ e $\mathrm{Im}(L) = <(1, 0, 0), (0, 0, 1)>$ e se ne calcoli la matrice $M^E_{L(B)}$, dove $B$ è la base $((1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1)$ del dominio ed $E$ la base canonica del codominio.

   (b) Tra gli endomorfismi $L$ soddisfacenti le condizioni di (a) determinarne, se esiste, uno con autovalori: $0, 1$ e $512$. È unico?

   (c) Tra gli endomorfismi $L$ soddisfacenti le condizioni di (a) determinarne, se esiste, uno diagonalizzabile con autovalori: 0 e 1. È unico?

   (d) Tra gli endomorfismi $L$ soddisfacenti le condizioni di (a) determinarne, se esiste, uno NON diagonalizzabile con autovalori: 0 e 1. È unico?

3. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, si considerino il piano $\pi : x - y - z = 0$ e le rette

$$r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = -t \\ y = \ \ t + 2 \\ z = \ \ t - 1 \end{cases}.$$

   (a) Determinare la proiezione ortogonale di $r$ e di $s$ sul piano $\pi$.

   (b) Sul piano $\pi$ si consideri la retta

$$r_\pi : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

   e si determini una retta $s'$ contenuta nel piano $\sigma$ di equazione $\sigma : x - y - z = 2$, la cui proiezione ortogonale su $\pi$ sia $r_\pi$.

   (c) Calcolare la distanza tra le rette $r_\pi$ e $s'$.

4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Calcolare gli autovalori complessi (cioè in $\mathbf{C}$) della matrice $A$, dimostrare che $A$ è diagonalizzabile nei numeri complessi e scrivere una matrice $H$ invertibile e una matrice $D$ diagonale a coefficienti complessi tale che $H^{-1}AH = D$.