CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 28-03-09

I prova parziale

TEMA n.1

Parte 1. Quesiti preliminari.
Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata). **Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato**.

a) Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare. Se $\mathrm{Im}\,(f) =< f(v_1), f(v_2) >$ allora v_1, v_2 generano $\mathbb{R}^2$.

b) Sia $U_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = \alpha\} \subset \mathbb{R}^3$. Per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$, U_α è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

c) Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare. Allora $\mathrm{Ker}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$ possono essere in somma diretta.

Parte 2. Esercizi.
Esercizio 1. Si considerino V_1 e V_2 i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{aligned} V_1 = &\ < (1, 0, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, -1) > \\ V_2 = &\ < (0, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 2, 1), (1, 0, 1, 1, 1) > \end{aligned}$$

i) Determinare una base B_1 di V_1 e una base B_2 di V_2. Calcolare $\dim(V_1)$ e $\dim(V_2)$.

ii) Determinare una base di $V_1 \cap V_2$ e una base di $V_1 + V_2$. Quanto valgono $\dim(V_1 \cap V_2)$ e $\dim(V_1 + V_2)$? I sottospazi V_1 e V_2 sono in somma diretta?

iii) Scrivere se possibile il vettore $v = (1, 0, 1, 1, 0)$ come somma $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ e $v_1 \neq (0, 0, 0, 0, 0)$ e $v_2 \neq (0, 0, 0, 0, 0)$. Tale scrittura è unica?

iv) Determinare $S \leq \mathbb{R}^5$ tale che $S \oplus (V_1 \cap V_2) = \mathbb{R}^5$. È unico?

v) Per ogni possibile scelta di S tale che $S \oplus (V_1 \cap V_2) = \mathbb{R}^5$ determinare $\dim(S \cap V_1)$ e $\dim(S \cap V_2)$.

Esercizio 2.

1) Esiste $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ lineare tale che

- $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f =< (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0) >$;
- $f(0, 0, 1, 1) = (1, 0, 0, 1)$.

È unica

2) Esiste $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ lineare tale che

- $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, g =< (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0) >$;
- $g(0, 0, 1, 1) = (1, 0, 0, 1)$
- $g(1, 0, 0, 0) = (0, 1, 0, 0)$.

È unica?

Esercizio 3. Si considerino le applicazioni lineari $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ definite da:

$$f_\alpha(x, y, z) = (\alpha x + y + (\alpha - 1)z, z, \alpha x + y)$$

a) Determinare base e dimensione di $\operatorname{Ker} f_\alpha$ e di $\operatorname{Im} f_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Calcolare base e dimensione di

$$K = \operatorname{Ker} f_0 + \operatorname{Ker} f_1 + \operatorname{Ker} f_2 + \operatorname{Ker} f_3$$

e

$$I = \operatorname{Im} f_0 \cap \operatorname{Im} f_1 \cap \operatorname{Im} f_2 \cap \operatorname{Im} f_3.$$

c) Determinare se esiste (definendola su una base) un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ non nulla tale che $\operatorname{Ker} g \supseteq \operatorname{Ker} f_\alpha$ e $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im} f_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

Regole d'esame

- Consegnare solo il foglio bianco con le soluzioni scritte in modo leggibile ed ordinato, NON consegnare fogli di brutta copia. Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, n. tema ecc..).
- Verrà valutato solo quanto scritto a penna (blu o nera).
- La durata del compito è di 2 ore.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 28-03-09

I prova parziale

TEMA n.2

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata). **Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato**.

a) Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare. Se $\mathbb{R}^2 =< f(v_1), f(v_2) >$ allora v_1, v_2 generano $\mathbb{R}^2$.

b) Sia $V_\beta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = \beta\} \subset \mathbb{R}^3$. Per ogni valore di $\beta \in \mathbb{R}$, V_β è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

c) Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Allora $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ possono essere in somma diretta.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si considerino W_1 e W_2 i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{aligned} W_1 = & \quad \langle (0,1,1,1,1), (2,-1,1,1,-1), (0,0,0,1,-1) \rangle \\ W_2 = & \quad \langle (1,1,2,2,1), (-1,1,0,0,1), (1,0,1,1,1) \rangle \end{aligned}$$

i) Determinare una base B_1 di W_1 e una base B_2 di W_2. Calcolare $\dim(W_1)$ e $\dim(W_2)$.

ii) Determinare una base di $W_1 \cap W_2$ e una base di $W_1 + W_2$. Quanto valgono $\dim(W_1 \cap W_2)$ e $\dim(W_1 + W_2)$? I sottospazi W_1 e W_2 sono in somma diretta?

iii) Scrivere se possibile il vettore $w = (0, 1, 1, 1, 1)$ come somma $w = w_1 + w_2$ con $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ e $w_1 \neq (0, 0, 0, 0, 0)$ e $w_2 \neq (0, 0, 0, 0, 0)$. Tale scrittura è unica?

iv) Determinare $S \leq \mathbb{R}^5$ tale che $S \oplus (W_1 \cap W_2) = \mathbb{R}^5$. È unico?

v) Per ogni possibile scelta di S tale che $S \oplus (W_1 \cap W_2) = \mathbb{R}^5$ determinare $\dim(S \cap W_1)$ e $\dim(S \cap W_2)$.

Esercizio 2.

1) Esiste $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ lineare tale che

- $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f =< (1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0) >$;
- $f(0, 1, 0, 1) = (1, 0, 0, 1)$.

È unica

2) Esiste $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ lineare tale che

- $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} g =< (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0) >$;
- $g(0, 1, 0, 1) = (1, 0, 0, 1)$
- $g(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 1, 0)$.

È unica?

Esercizio 3. Si considerino le applicazioni lineari $g_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ definite da:

$$g_\alpha(x, y, z) = (x + \alpha y + (\alpha - 1)z, z, x + \alpha y)$$

a) Determinare base e dimensione di $\operatorname{Ker} g_\alpha$ e di $\operatorname{Im} g_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Calcolare base e dimensione di

$$K = \operatorname{Ker} g_0 + \operatorname{Ker} g_1 + \operatorname{Ker} g_2 + \operatorname{Ker} g_3$$

e

$$I = \operatorname{Im} g_0 \cap \operatorname{Im} g_1 \cap \operatorname{Im} g_2 \cap \operatorname{Im} g_3.$$

c) Determinare se esiste (definendola su una base) un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ non nulla tale che $\operatorname{Ker} h \supseteq \operatorname{Ker} g_\alpha$ e $\operatorname{Im} h \subseteq \operatorname{Im} g_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

Regole d'esame

- Consegnare solo il foglio bianco con le soluzioni scritte in modo leggibile ed ordinato, NON consegnare fogli di brutta copia. Compilare il foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, n. tema ecc..).
- Verrà valutato solo quanto scritto a penna (blu o nera).
- La durata del compito è di 2 ore.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 28-03-09

I prova parziale

TEMA n.3

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata). **Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato**.

a) Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Se $\mathrm{Im}\,(f) =< f(v_1), f(v_2), f(v_3) >$ allora v_1, v_2, v_3 generano $\mathbb{R}^3$.

b) Sia $W_\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = \gamma \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Per ogni valore di $\gamma \in \mathbb{R}$, W_γ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

c) Sia $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare. Allora $\mathrm{Ker}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$ non sono mai in somma diretta.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si considerino V_1 e V_2 i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{aligned} V_1 = &\quad < (1, 1, 2, 2, 1), (1, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1, -1) > \\ V_2 = &\quad < (2, -1, 1, 1, -1), (-1, 2, 1, 1, 2), (1, 0, 1, 1, 1) > \end{aligned}$$

i) Determinare una base B_1 di V_1 e una base B_2 di V_2. Calcolare $\dim(V_1)$ e $\dim(V_2)$.

ii) Determinare una base di $V_1 \cap V_2$ e una base di $V_1 + V_2$. Quanto valgono $\dim(V_1 \cap V_2)$ e $\dim(V_1 + V_2)$? I sottospazi V_1 e V_2 sono in somma diretta?

iii) Scrivere se possibile il vettore $v = (1, 1, 2, 2, 1)$ come somma $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ e $v_1 \neq (0, 0, 0, 0, 0)$ e $v_2 \neq (0, 0, 0, 0, 0)$. Tale scrittura è unica?

iv) Determinare $S \leq \mathbb{R}^5$ tale che $S \oplus (V_1 \cap V_2) = \mathbb{R}^5$. È unico?

v) Per ogni possibile scelta di S tale che $S \oplus (V_1 \cap V_2) = \mathbb{R}^5$ determinare $\dim(S \cap V_1)$ e $\dim(S \cap V_2)$.

Esercizio 2.

1) Esiste $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ lineare tale che

- $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f =< (1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0) >$;
- $f(1, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 1)$.

È unica

2) Esiste $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ lineare tale che

- $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, g =< (1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0) >$;
- $g(1, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 1)$
- $g(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 0)$.

È unica?

Esercizio 3. Si considerino le applicazioni lineari $F_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ definite da:

$$F_\alpha(x, y, z) = ((\alpha - 1)x + \alpha y + z, x, \alpha y + z)$$

a) Determinare base e dimensione di $\operatorname{Ker} F_\alpha$ e di $\operatorname{Im} F_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Calcolare base e dimensione di

$$K = \operatorname{Ker} F_0 + \operatorname{Ker} F_1 + \operatorname{Ker} F_2 + \operatorname{Ker} F_3$$

e

$$I = \operatorname{Im} F_0 \cap \operatorname{Im} F_1 \cap \operatorname{Im} F_2 \cap \operatorname{Im} F_3.$$

c) Determinare se esiste (definendola su una base) un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ non nulla tale che $\operatorname{Ker} h \supseteq \operatorname{Ker} F_\alpha$ e $\operatorname{Im} h \subseteq \operatorname{Im} F_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

Regole d'esame

- Consegnare solo il foglio bianco con le soluzioni scritte in modo leggibile ed ordinato NON consegnare fogli di brutta copia. Compilare il foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, n. tema ecc..).
- Verrà valutato solo quanto scritto a penna (blu o nera).
- La durata del compito è di 2 ore.
- È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 28-03-09

I prova parziale

TEMA n.4

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata). **Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato**.

a) Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare. Se $\mathrm{Im}\,(f) =< f(v_1), f(v_2), f(v_3 >$ allora v_1, v_2, v_3 generano $\mathbb{R}^2$.

b) Sia $U_\beta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = \beta\} \subset \mathbb{R}^3$. Per ogni valore di $\beta \in \mathbb{R}$, U_β è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

c) Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Allora $\mathrm{Ker}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$ non sono mai in somma diretta.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si considerino W_1 e W_2 i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{aligned} W_1 &= \langle(-1, 2, 1, 1, 2), (0, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1, -1)\rangle \\ W_2 &= \langle(1, 0, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1, -1), (1, 0, 1, 1, 1)\rangle \end{aligned}$$

i) Determinare una base B_1 di W_1 e una base B_2 di W_2. Calcolare $\dim(W_1)$ e $\dim(W_2)$.

ii) Determinare una base di $W_1 \cap W_2$ e una base di $W_1 + W_2$. Quanto valgono $\dim(W_1 \cap W_2)$ e $\dim(W_1 + W_2)$? I sottospazi W_1 e W_2 sono in somma diretta?

iii) Scrivere se possibile il vettore $w = (-1, 2, 1, 1, 2)$ come somma $w = w_1 + w_2$ con $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ e $w_1 \neq (0, 0, 0, 0, 0)$ e $w_2 \neq (0, 0, 0, 0, 0)$. Tale scrittura è unica?

iv) Determinare $S \leq \mathbb{R}^5$ tale che $S \oplus (W_1 \cap W_2) = \mathbb{R}^5$. È unico?

v) Per ogni possibile scelta di S tale che $S \oplus (W_1 \cap W_2) = \mathbb{R}^5$ determinare $\dim(S \cap W_1)$ e $\dim(S \cap W_2)$.

Esercizio 2.

1) Esiste $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ lineare tale che

- $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f =< (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0) >$;
- $f(1, 1, 0, 0) = (0, 1, 0, 1)$.

È unica

2) Esiste $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ lineare tale che

- $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, g =< (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0) >$;
- $g(1, 1, 0, 0) = (0, 1, 0, 1)$
- $g(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 0)$.

È unica?

Esercizio 3. Si considerino le applicazioni lineari $G_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ definite da:

$$G_\alpha(x, y, z) = ((\alpha + 1)x + y + \alpha z, z, (\alpha + 1)x + y)$$

a) Determinare base e dimensione di $\operatorname{Ker} G_\alpha$ e di $\operatorname{Im} G_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Calcolare base e dimensione di

$$K = \operatorname{Ker} G_0 + \operatorname{Ker} G_1 + \operatorname{Ker} G_2 + \operatorname{Ker} G_3$$

e

$$I = \operatorname{Im} G_0 \cap \operatorname{Im} G_1 \cap \operatorname{Im} G_2 \cap \operatorname{Im} G_3.$$

c) Determinare se esiste (definendola su una base) un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ non nulla tale che $\operatorname{Ker} h \supseteq \operatorname{Ker} G_\alpha$ e $\operatorname{Im} h \subseteq \operatorname{Im} G_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

Regole d'esame

- Consegnare solo il foglio bianco con le soluzioni scritte in modo leggibile ed ordinato, NON consegnare fogli di brutta copia. Compilare il foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, docente, n. tema ecc..).
- Verrà valutato solo quanto scritto a penna (blu o nera).
- La durata del compito è di 2 ore.
- È vietato 'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di ogni tipo.
- Non è consentito uscire dall'aula durante la prova per nessun motivo: si potrà uscire solo dopo aver consegnato definitivamente il proprio elaborato.
- Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione.