Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E MECCANICA

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 09-09-2010

TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare a coefficienti reali in 3 variabili è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
2. Nello spazio affine tridimensionale due rette non complanari sono sghembe.
3. La matrice nulla $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Si considerino la varietà lineare S e, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il sistema lineare Σ_λ:

$$S = (1,1,0,0) + < (1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1) >;$$

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} x - 2y + 3z - 3t = -1 \\ x + (2\lambda + 1)z + t = 2\lambda + 3 \\ 3x - 2y + (3\lambda + 4)z + (\lambda - 1)t = 3\lambda + 3. \end{cases}$$

a) Scrivere un sistema lineare Σ' il cui insieme delle soluzioni sia S.

b) Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali Σ' e Σ_λ hanno soluzioni in comune.

c) Per i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ trovati in b), determinare le soluzioni comuni tra Σ' e Σ_λ.

Esercizio 2 Si consideri, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha x - y - (1 + 2\alpha)z \\ (\alpha + 1)x + (1 - \alpha)y + \alpha z \\ y + (1 + \alpha)z \end{pmatrix}$$

in notazione per righe $f_\alpha(x, y, z) = (-\alpha x - y - (1 + 2\alpha)z, (\alpha + 1)x + (1 - \alpha)y + \alpha z, y + (1 + \alpha)z)$

a) Scrivere la matrice A_α di f_α rispetto alle basi canoniche.

b) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_α è invertibile.

c) Calcolare il polinomio caratteristico di f_α [Suggerimento: sviluppare il determinante secondo la prima colonna] e stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_α è diagonalizzabile.

d) Posto $\alpha = -2$ determinare $H \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ matrice invertibile che diagonalizza A_{-2} (cioè tale che $D = H^{-1}A_{-2}H$ con D matrice diagonale).

(*continua*)

Esercizio 3 Si consideri il sottospazio $U =< (1,0,1,2),(0,1,-1,-2),(2,1,1,2) >$ di $\mathbb{R}^4$.

a) Scrivere una base ortonormale $\mathcal{B}$ di U.

b) Determinare un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$. Tale W è unico?

c) Scrivere una base ortonormale $\mathcal{C}$ di W. L'insieme $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$?

d) Calcolare $W^{\perp} \cap U$.

Esercizio 4 In un fissato sistema di riferimento cartesiano $(\mathcal{R}; x, y, z)$, consideriamo le rette

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 4y - z = 6 \end{cases} \qquad s_\beta : \begin{cases} 2x + z = 2\beta + 12 \\ 2y - \beta z = 2 \end{cases} .$$

a) Determinare la distanza tra la retta r e il punto $P = (0,1,1)$.

b) Stabilire per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ le due rette r e s_β sono sghembe.

c) Per $\beta = 0$, determinare, se esiste, una retta perpendicolare e incidente ad entrambe le rette r e s_0.

d) Determinare i valori $\bar{\beta}$ del parametro per cui r e $s_{\bar{\beta}}$ sono perpendicolari.

e) Sia $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$ il sistema di riferimento in cui l'asse X è la retta r e l'asse Y è la retta $s_{\bar{\beta}}$, con $\bar{\beta}$ uno dei valori determinati al punto d). Scrivere le equazioni dell'asse Z nel sistema di riferimento $\mathcal{R}$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E MECCANICA

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 09-09-2010

TEMA n.2

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare a coefficienti reali in 3 variabili non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
2. Nello spazio affine tridimensionale due rette complanari non sono sghembe.
3. La matrice identica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Si considerino la varietà lineare S e, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il sistema lineare Σ_λ:

$$S = (1, -1, 0, 0) + < (1, -1, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, -1) >$$

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} x + 2y + 3z + 3t = 1 \\ x + (2\lambda - 3)z - t = 2\lambda - 3 \\ 2x + 2y + (3\lambda - 1)z + (\lambda + 2)t = 3\lambda - 2. \end{cases}$$

a) Scrivere un sistema lineare Σ' il cui insieme delle soluzioni sia S.

b) Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali Σ' e Σ_λ hanno soluzioni in comune.

c) Per i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ trovati in b), determinare le soluzioni comuni tra Σ' e Σ_λ.

Esercizio 2 Si consideri, al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$, il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$f_\beta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\beta + 1)x - y - (3 + 2\beta)z \\ (\beta + 2)x - \beta y + (\beta + 1)z \\ y + (2 + \beta)z \end{pmatrix}$$

in notazione per righe $f_\beta(x, y, z) = (-(\beta+1)x - y - (3+2\beta)z, (\beta+2)x - \beta y + (\beta+1)z, y + (2+\beta)z)$

a) Scrivere la matrice A_β di f_β rispetto alle basi canoniche.

b) Stabilire per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_β è invertibile.

c) Calcolare il polinomio caratteristico di f_β [Suggerimento: sviluppare il determinante secondo la prima colonna] e stabilire per quali $\beta \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_β è diagonalizzabile.

d) Posto $\beta = -3$ determinare $H \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ matrice invertibile che diagonalizza A_{-3} (cioè tale che $D = H^{-1}A_{-3}H$ con D matrice diagonale).

(*continua*)

Esercizio 3 Si consideri il sottospazio $U =< (2,0,1,2),(0,-1,1,2),(2,1,0,0) >$ di $\mathbb{R}^4$.

a) Scrivere una base ortonormale $\mathcal{B}$ di U.

b) Determinare un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$. Tale W è unico?

c) Scrivere una base ortonormale $\mathcal{C}$ di W. L'insieme $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$?

d) Calcolare $W^\perp \cap U$.

Esercizio 4 In un fissato sistema di riferimento cartesiano $(\mathcal{R}; x, y, z)$, consideriamo le rette

$$r : \begin{cases} -x+y+z=0 \\ 2x+4y+z=6 \end{cases} \qquad s_\alpha : \begin{cases} 2x-z=2\alpha-8 \\ 2y-\alpha z=2 \end{cases} .$$

a) Determinare la distanza tra la retta r e il punto $P = (1,0,1)$.

b) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ le due rette r e s_α sono sghembe.

c) Per $\alpha = 0$, determinare, se esiste, una retta perpendicolare e incidente ad entrambe le rette r e s_0.

d) Determinare i valori $\bar{\alpha}$ del parametro per cui r e $s_{\bar{\alpha}}$ sono perpendicolari.

e) Sia $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$ il sistema di riferimento in cui l'asse X è la retta r e l'asse Y è la retta $s_{\bar{\alpha}}$, con $\bar{\alpha}$ uno dei valori determinati al punto d). Scrivere le equazioni dell'asse Z nel sistema di riferimento $\mathcal{R}$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E MECCANICA

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 09-09-2010

TEMA n.3

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 3 variabili a coefficienti reali può non essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

2. Nello spazio affine tridimensionale due rette sghembe possono essere complanari.

3. La matrice nulla $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Si considerino la varietà lineare S e, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema lineare Σ_α:

$$S = (1,1,0,0) + < (1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1) >;$$

$$\Sigma_\alpha : \begin{cases} x - z + t = 1 \\ x - 2y + (2\alpha + 5)z - 3t = 2\alpha + 1 \\ 2x + y + (2\alpha - 2)z + (\alpha + 4)t = 2\alpha + 4. \end{cases}$$

a) Scrivere un sistema lineare Σ' il cui insieme delle soluzioni sia S.

b) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali Σ' e Σ_α hanno soluzioni in comune.

c) Per i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ trovati in b), determinare le soluzioni comuni tra Σ' e Σ_α.

Esercizio 2 Si consideri, al variare del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$, il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$f_\gamma \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\gamma - 1)x - y + (2\gamma - 3)z \\ (2 - \gamma)x + \gamma y + (1 - \gamma)z \\ y + (2 - \gamma)z \end{pmatrix}$$

in notazione per righe

a) Scrivere la matrice A_γ di f_γ rispetto alle basi canoniche.

b) Stabilire per quali valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_γ è invertibile.

c) Calcolare il polinomio caratteristico di f_γ [Suggerimento: sviluppare il determinante secondo la prima colonna] e stabilire per quali $\gamma \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_γ è diagonalizzabile.

d) Posto $\gamma = 3$ determinare $H \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ matrice invertibile che diagonalizza A_3 (cioè tale che $D = H^{-1}A_3H$ con D matrice diagonale).

(*continua*)

Esercizio 3 Si consideri il sottospazio $U = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} >$ di $\mathbb{R}^4$.

a) Scrivere una base ortonormale $\mathcal{B}$ di U.

b) Determinare un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$. Tale W è unico?

c) Scrivere una base ortonormale $\mathcal{C}$ di W. L'insieme $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$?

d) Calcolare $W^{\perp} \cap U$.

Esercizio 4 In un fissato sistema di riferimento cartesiano $(\mathcal{R}; x, y, z)$, consideriamo le rette

$$r : \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 4x + 2y - z = 6 \end{cases} \qquad s_\delta : \begin{cases} 2y + z = 2\delta + 12 \\ 2x - \delta z = 2 \end{cases} .$$

a) Determinare la distanza tra la retta r e il punto $P = (0, 1, 1)$.

b) Stabilire per quali valori del parametro $\delta \in \mathbb{R}$ le due rette r e s_δ sono sghembe.

c) Per $\delta = 0$, determinare, se esiste, una retta perpendicolare e incidente ad entrambe le rette r e s_0.

d) Determinare i valori $\bar{\delta}$ del parametro per cui r e $s_{\bar{\delta}}$ sono perpendicolari.

e) Sia $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$ il sistema di riferimento in cui l'asse X è la retta r e l'asse Y è la retta $s_{\bar{\delta}}$, con $\bar{\delta}$ uno dei valori determinati al punto d). Scrivere le equazioni dell'asse Z nel sistema di riferimento $\mathcal{R}$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E MECCANICA

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 09-09-2010

TEMA n.4

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 3 variabili a coefficienti reali è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
2. Nello spazio affine tridimensionale due rette non complanari sono sghembe.
3. La matrice identica $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Si considerino la varietà lineare S e, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema lineare Σ_α:

$$S = (1,-1,0,0) + < (1,-1,0,0), (0,1,-1,0), (0,0,1,-1) >;$$

$$\Sigma_\alpha : \begin{cases} x - z - t = -1 \\ x + 2y + (2\alpha+1)z + 3t = 2\alpha - 1 \\ 3x + 4y + (3\alpha+2)z + (\alpha+5)t = 3\alpha - 1. \end{cases}$$

a) Scrivere un sistema lineare Σ' il cui insieme delle soluzioni sia S.

b) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali Σ' e Σ_α hanno soluzioni in comune.

c) Per i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ trovati in b), determinare le soluzioni comuni tra Σ' e Σ_α.

Esercizio 2 Si consideri, al variare del parametro $\delta \in \mathbb{R}$, il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$f_\delta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\delta)x - y + (1-2\delta)z \\ \delta x + (2-\delta)y + (\delta-1)z \\ y + \delta z \end{pmatrix}$$

in notazione per righe $f_\delta(x,y,z) = ((1-\delta)x - y + (1-2\delta)z, \delta x + (2-\delta)y + (\delta-1)z, y + \delta z)$

a) Scrivere la matrice A_δ di f_δ rispetto alle basi canoniche.

b) Stabilire per quali valori del parametro $\delta \in \mathbb{R}$ ll'endomorfismo f_δ è invertibile.

c) Calcolare il polinomio caratteristico di f_δ [Suggerimento: sviluppare il determinante secondo la prima colonna] e stabilire per quali $\delta \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_δ è diagonalizzabile.

d) Posto $\delta = -1$ determinare $H \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ matrice invertibile che diagonalizza A_{-1} (cioè tale che $D = H^{-1}A_{-1}H$ con D matrice diagonale).

(*continua*)

Esercizio 3 Si consideri il sottospazio $U = < (1, 0, 1, 2), (0, 1, -2, -2), (3, 1, 1, 4) >$ di $\mathbb{R}^4$.

a) Scrivere una base ortonormale $\mathcal{B}$ di U.

b) Determinare un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$. Tale W è unico?

c) Scrivere una base ortonormale $\mathcal{C}$ di W. L'insieme $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$?

d) Calcolare $W^\perp \cap U$.

Esercizio 4 In un fissato sistema di riferimento cartesiano $(\mathcal{R}; x, y, z)$, consideriamo le rette

$$r : \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2x + 4y + 4z = 6 \end{cases} \qquad s_\gamma : \begin{cases} 2x - y = -\gamma - 1 \\ \gamma y + 2z = \gamma \end{cases} .$$

a) Determinare la distanza tra la retta r e il punto $P = (0, 1, 1)$.

b) Stabilire per quali valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ le due rette r e s_γ sono sghembe.

c) Per $\gamma = 0$, determinare, se esiste, una retta perpendicolare e incidente ad entrambe le rette r e s_0.

d) Determinare i valori $\bar{\gamma}$ del parametro per cui r e $s_{\bar{\gamma}}$ sono perpendicolari.

e) Sia $(\mathcal{R}'; X, Y, Z)$ il sistema di riferimento in cui l'asse X è la retta r e l'asse Y è la retta $s_{\bar{\gamma}}$, con $\bar{\gamma}$ uno dei valori determinati al punto d). Scrivere le equazioni dell'asse Z nel sistema di riferimento $\mathcal{R}$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate