LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO E MECCANICA
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 08-07-10
TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta. Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato.

a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono linearmente indipendenti, anche $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\}$ sono indipendenti.

b) L'insieme di tutte le matrici $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ il cui polinomio caratteristico è $p_A(t) = t^2 + 1$ è un sottospazio di $M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

c) Se r ed s sono due rette sghembe in $\mathbb{A}^3$, non esiste nessuna retta incidente r ed s ortogonale ad entrambe.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1.

a) Determinare una base del sottospazio $U =< (1, 1, 1), (0, 1, 2), (2, 1, 0) >$ di $\mathbb{R}^3$.

b) Stabilire se il sottoinsieme $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, x + y + z = 3\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

c) Determinare $U \cap W$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare definita da $f(x, y, z) = (2x - y + z, x - z)$.

a) Scriverne la matrice rispetto alle basi canoniche.

b) Determinare nucleo ed immagine di f. La funzione è iniettiva? È suriettiva?

c) Determinare $f^{-1}(1, 1)$.

Esercizio 3. Determinare una base ortonormale di autovettori per la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -6 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4.

a) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r per $P(1, 1, 0)$ e $Q(0, 1, 1)$.

b) Stabilire la posizione reciproca tra r e la retta $s : \begin{cases} x + y = 4 \\ z = 1 \end{cases}$.

c) Calcolare la distanza tra r ed s e determinare i punti di minima distanza.

Esercizio 5. Data la base $\mathcal{B} = \{(5, 18, 22), (-1, -8, -1), (1, -1, 12)\}$, determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate nella base $\mathcal{B}$ e nella base canonica.

Esercizio 6. Si consideri il sottospazio $U = \{x + y = 0; z + t = 0\}$ di $\mathbb{R}^4$. Determinare, scrivendone la matrice rispetto ad una opportuna base, un endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ tale che ϕ sia l'identità su U ed inoltre $\ker \phi \subsetneq U^\perp$ e $\ker \phi^2 = U^\perp$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO E MECCANICA
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 08-07-10
TEMA n.2

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta. Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato.

a) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono linearmente dipendenti, anche $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\}$ sono dipendenti.

b) L'insieme di tutte le matrici $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ il cui polinomio caratteristico è $p_A(t) = t^2 + 2$ è un sottospazio di $M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

c) Se r ed s sono due rette sghembe in $\mathbb{A}^3$, esiste un'unica retta incidente r ed s ortogonale ad entrambe.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1.

a) Determinare una base del sottospazio $U =< (1,1,2), (0,1,3), (3,1,0) >$ di $\mathbb{R}^3$.

b) Stabilire se il sottoinsieme $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, x + y + z = 4\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

c) Determinare $U \cap W$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare definita da $f(x, y, z) = (2x + y - z, x + z)$.

a) Scriverne la matrice rispetto alle basi canoniche.

b) Determinare nucleo ed immagine di f. La funzione è iniettiva? È suriettiva?

c) Determinare $f^{-1}(1, 1)$.

Esercizio 3. Determinare una base ortonormale di autovettori per la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4.

a) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r per $P(1, 1, 0)$ e $Q(1, 0, 1)$.

b) Stabilire la posizione reciproca tra r e la retta $s : \begin{cases} x + y = 4 \\ z = 1 \end{cases}$.

c) Calcolare la distanza tra r ed s e determinare i punti di minima distanza.

Esercizio 5. Data la base $\mathcal{B} = \{(2, -1, 11), (-1, -8, -1), (4, 18, 23)\}$, determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate nella base $\mathcal{B}$ e nella base canonica.

Esercizio 6. Si consideri il sottospazio $U = \{x - y = 0; z + t = 0\}$ di $\mathbb{R}^4$. Determinare, scrivendone la matrice rispetto ad una opportuna base, un endomorfismo ψ di $\mathbb{R}^4$ tale che ψ sia l'identità su U ed inoltre $\ker \psi \subsetneq U^\perp$ e $\ker \psi^2 = U^\perp$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO E MECCANICA
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 08-07-10
TEMA n.3

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta. Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato.

a) Se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono soluzioni di un sistema lineare, allora $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ è soluzione del sistema omogeneo associato.

b) L'insieme di tutte le matrici $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ il cui polinomio caratteristico è $p_A(t) = t^2 + 3$ è un sottospazio di $M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

c) Se r ed s sono due rette sghembe in $\mathbb{A}^3$, esistono infinite rette incidenti r ed s ed ortogonali ad entrambe.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1.

a) Determinare una base del sottospazio $U =< (1,1,3),(0,1,4),(4,1,0) >$ di $\mathbb{R}^3$.

b) Stabilire se il sottoinsieme $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, x+y+z = 5\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

c) Determinare $U \cap W$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare definita da $f(x,y,z) = (x-z, 2x-y+z)$.

a) Scriverne la matrice rispetto alle basi canoniche.

b) Determinare nucleo ed immagine di f. La funzione è iniettiva? È suriettiva?

c) Determinare $f^{-1}(1,1)$.

Esercizio 3. Determinare una base ortonormale di autovettori per la matrice $M = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4.

a) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r per $P(1,1,0)$ e $Q(0,1,1)$.

b) Stabilire la posizione reciproca tra r e la retta $s : \begin{cases} y+z=4 \\ z=1 \end{cases}$.

c) Calcolare la distanza tra r ed s e determinare i punti di minima distanza.

Esercizio 5. Data la base $\mathcal{B} = \{(9,-13,1),(4,2,7),(8,-13,2)\}$, determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate nella base $\mathcal{B}$ e nella base canonica.

Esercizio 6. Si consideri il sottospazio $U = \{x+y=0; z-t=0\}$ di $\mathbb{R}^4$. Determinare, scrivendone la matrice rispetto ad una opportuna base, un endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ tale che ϕ sia l'identità su U ed inoltre $\ker \phi \subsetneq U^\perp$ e $\ker \phi^2 = U^\perp$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

LAUREA IN INGEGNERIA AMBIENTE - TERRITORIO E MECCANICA
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 08-07-10
TEMA n.4

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta. Qualora non si risponda in maniera corretta e ben motivata ad almeno 2 di questi 3 quesiti il compito verrà considerato gravemente insufficiente e non verrà corretto il resto dell'elaborato.

a) Se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono soluzioni di un sistema lineare, allora $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ è soluzione del sistema omogeneo associato.

b) L'insieme di tutte le matrici $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ il cui polinomio caratteristico è $p_A(t) = t^2 + 4$ è un sottospazio di $M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

c) Se r ed s sono due rette sghembe in $\mathbb{A}^3$, esistono almeno due rette incidenti r ed s ortogonali ad entrambe.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1.

a) Determinare una base del sottospazio $U = \langle (1,1,4), (0,1,5), (5,1,0) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

b) Stabilire se il sottoinsieme $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, x + y + z = 6\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

c) Determinare $U \cap W$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare definita da $f(x,y,z) = (x + z, 2x + y - z)$.

a) Scriverne la matrice rispetto alle basi canoniche.

b) Determinare nucleo ed immagine di f. La funzione è iniettiva? È suriettiva?

c) Determinare $f^{-1}(1,1)$.

Esercizio 3. Determinare una base ortonormale di autovettori per la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -5 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4.

a) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r per $P(1,0,1)$ e $Q(0,1,1)$.

b) Stabilire la posizione reciproca tra r e la retta $s : \begin{cases} x + z = 4 \\ y = 1 \end{cases}$.

c) Calcolare la distanza tra r ed s e determinare i punti di minima distanza.

Esercizio 5. Data la base $\mathcal{B} = \{(0,26,21), (4,2,7), (8,-13,2)\}$, determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ che hanno le stesse coordinate nella base $\mathcal{B}$ e nella base canonica.

Esercizio 6. Si consideri il sottospazio $U = \{x - y = 0; z - t = 0\}$ di $\mathbb{R}^4$. Determinare, scrivendone la matrice rispetto ad una opportuna base, un endomorfismo ψ di $\mathbb{R}^4$ tale che ψ sia l'identità su U ed inoltre $\ker \psi \subsetneq U^\perp$ e $\ker \psi^2 = U^\perp$.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.