CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 15-06-2010

II prova parziale

TEMA n.1

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

1) La proiezione ortogonale del vettore $(1, -1, 1)$ sul sottospazio $\langle(1, 1, 1)\rangle$ è nulla.

2) Due rette nello spazio ortogonali fra loro sono incidenti oppure sghembe.

3) Ogni matrice ortogonale è invertibile.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si consideri la seguente matrice 4 per 4 dipendente dal parametro α:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

a) Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice A_α è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ e per i valori trovati determinare una base di autovettori.

b) Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice A_α è ortogonalmente diagonalizzabile?

c) Esistono valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la matrice A_α sia simile ad una matrice ortogonale?

d) Stabilire se esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che A_α sia simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Determinare, se esistono, tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{C}$ tali che la matrice A_α abbia due coppie di autovalori complessi coniugati.

Esercizio 2. Dati i sottospazi $U = \langle(1, -1, 0)\rangle$ e $W = \langle(0, 1, -1)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$:

i) calcolare la proiezione ortogonale del sottospazio $U^\perp \cap W^\perp$ sul sottospazio $(U + W)^\perp$;

ii) determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $p_U(v) = p_W(v)$.

(continua)

Esercizio 3. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il vettore $v = (0, -1, 0)$, il punto $P = (1, 2, 1)$ e la retta r di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1. \end{cases}$

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e parallelo al vettore v.

b) Determinare equazioni cartesiane di una retta t contenuta nel piano π, ortogonale ad r e passante per il punto P.

c) Determinare equazioni cartesiane delle rette s_1, s_2, sul piano π, bisettrici degli angoli formati dalle rette r e t.

d) Determinare equazioni cartesiane delle rette s_1, s_2 in un sistema di riferimento euclideo (X, Y, Z) in cui l'asse X sia la retta r e l'asse Y sia la retta t.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 15-06-2010

II prova parziale

TEMA n.2

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

1) La proiezione ortogonale del vettore $(1, 1, 0)$ sul sottospazio $\langle(2, 4, 1)\rangle$ è nulla.

2) Due piani distinti nello spazio si intersecano sempre in una retta.

3) Ogni matrice diagonale è invertibile.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si consideri la seguente matrice 4 per 4 dipendente dal parametro h:

$$B_h = \begin{pmatrix} h^2 & 0 & 0 & -h+1 \\ 0 & -h & 0 & 0 \\ 0 & -h+1 & -h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h^2 \end{pmatrix}$$

a) Determinare per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ la matrice B_h è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ e per i valori trovati determinare una base di autovettori.

b) Per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ la matrice B_h è ortogonalmente diagonalizzabile?

c) Esistono valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ tali che la matrice B_h sia simile ad una matrice ortogonale?

d) Stabilire se esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ tali che B_h sia simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Determinare, se esistono, tutti i valori del parametro $h \in \mathbb{C}$ tali che la matrice B_h abbia due coppie di autovalori complessi coniugati.

Esercizio 2. Dati i sottospazi $U_1 = \langle(1, 2, 0)\rangle$ e $U_2 = \langle(0, 1, 2)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$:

i) calcolare la proiezione ortogonale del sottospazio $U_1^\perp \cap U_2^\perp$ sul sottospazio $(U_1 + U_2)^\perp$;

ii) determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $p_{U_1}(v) = p_{U_2}(v)$.

(continua)

Esercizio 3. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il vettore $v = (2, 0, 0)$, il punto $P = (2, 1, 1)$ e la retta r di equazioni parametriche $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1. \end{cases}$

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e parallelo al vettore v.

b) Determinare equazioni cartesiane di una retta t contenuta nel piano π, ortogonale ad r e passante per il punto P.

c) Determinare equazioni cartesiane delle rette s_1, s_2, sul piano π, bisettrici degli angoli formati dalle rette r e t.

d) Determinare equazioni cartesiane delle rette s_1, s_2 in un sistema di riferimento euclideo (X, Y, Z) in cui l'asse Y sia la retta r e l'asse Z sia la retta t.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 15-06-2010

II prova parziale

TEMA n.3

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

1) La proiezione ortogonale del vettore $(1,1,0)$ sul sottospazio $\langle(1,5,1)\rangle$ è nulla.

2) Due rette nello spazio sono complanari se e solo se non sono sghembe.

3) Ogni matrice di cambiamento di base è invertibile.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si consideri la seguente matrice 4 per 4 dipendente dal parametro γ:

$$H_\gamma = \begin{pmatrix} \gamma^2 & 0 & 0 & \gamma+1 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma+1 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

a) Determinare per quali valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ la matrice H_γ è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ e per i valori trovati determinare una base di autovettori.

b) Per quali valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ la matrice H_γ è ortogonalmente diagonalizzabile?

c) Esistono valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che la matrice H_γ sia simile ad una matrice ortogonale?

d) Stabilire se esistono valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che H_γ sia simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Determinare, se esistono, tutti i valori del parametro $\gamma \in \mathbb{C}$ tali che la matrice H_γ abbia due coppie di autovalori complessi coniugati.

Esercizio 2. Dati i sottospazi $V_1 = \langle(1,0,-1)\rangle$ e $V_2 = \langle(1,1,0)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$:

i) calcolare la proiezione ortogonale del sottospazio $(V_1+V_2)^\perp$ sul sottospazio $V_1^\perp \cap V_2^\perp$;

ii) determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $p_{V_1}(v) = p_{V_2}(v)$.

(continua)

Esercizio 3. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il vettore $v = (0, 0, 1)$, il punto $P = (1, 1, 2)$ e la retta r di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 - \lambda. \end{cases}$

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e parallelo al vettore v.

b) Determinare equazioni cartesiane di una retta t contenuta nel piano π, ortogonale ad r e passante per il punto P.

c) Determinare equazioni cartesiane delle rette s_1, s_2, sul piano π, bisettrici degli angoli formati dalle rette r e t.

d) Determinare equazioni cartesiane delle rette s_1, s_2 in un sistema di riferimento euclideo (X, Y, Z) in cui l'asse X sia la retta r e l'asse Z sia la retta t.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 15-06-2010

II prova parziale

TEMA n.4

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

1) La proiezione ortogonale del vettore $(1, 0, 1)$ sul sottospazio $\langle(3, 1, 3)\rangle$ è nulla.

2) Due rette parallele sono complanari.

3) Ogni matrice simmetrica è invertibile.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si consideri la seguente matrice 4 per 4 dipendente dal parametro k:

$$M_k = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 & -k+1 \\ 0 & k^2 & 0 & 0 \\ 0 & -k+1 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

a) Determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice M_k è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ e per i valori trovati determinare una base di autovettori.

b) Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice M_k è ortogonalmente diagonalizzabile?

c) Esistono valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ tali che la matrice M_k sia simile ad una matrice ortogonale?

d) Stabilire se esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che M_k sia simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Determinare, se esistono, tutti i valori del parametro $k \in \mathbb{C}$ tali che la matrice M_k abbia due coppie di autovalori complessi coniugati.

Esercizio 2. Dati i sottospazi $S = \langle(0, 1, 1)\rangle$ e $T = \langle(1, 1, 0)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$:

i) calcolare la proiezione ortogonale del sottospazio $(S + T)^\perp$ sul sottospazio $S^\perp \cap T^\perp$;

ii) determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $p_S(v) = p_T(v)$.

(continua)

Esercizio 3. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il vettore $v = (0, -1, 0)$, il punto $P = (1, 2, 1)$ e la retta r di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - \lambda \\ z = 3 + \lambda. \end{cases}$

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e parallelo al vettore v.

b) Determinare equazioni cartesiane di una retta t contenuta nel piano π, ortogonale ad r e passante per il punto P.

c) Determinare equazioni cartesiane delle rette s_1, s_2, sul piano π, bisettrici degli angoli formati dalle rette r e t.

d) Determinare equazioni cartesiane delle rette s_1, s_2 in un sistema di riferimento euclideo (X, Y, Z) in cui l'asse Z sia la retta r e l'asse Y sia la retta t.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.