Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E MECCANICA

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 21-02-2011

TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. Esistono infiniti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 2.
2. Le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ sono simili.
3. Nello spazio euclideo tridimensionale due rette ortogonali sono necessariamente incidenti.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme $S = (1, 1, 1) + \langle (1, -1, 1), (1, 1, 2) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

1. Stabilire se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinare, se possibile, un sistema lineare di 2 equazioni in 4 incognite avente S come insieme di soluzioni.
3. Determinare, se possibile, un sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite avente S come insieme di soluzioni.
4. Determinare, se possibile, due diversi sistemi lineari aventi S come insieme di soluzioni.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + 1, 3y)$.

1. Stabilire se f è lineare.
2. Sia $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (0, 0)\}$. Stabilire se T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
3. Sia $W = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a, b) = f(x, y, z) \text{ per qualche } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$. Determinare il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^2$ contenente W.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$ al variare di $t \in \mathbb{R}$:

$$A_t = \langle (1, t, 0, 0), (1, 1, 0, t), (2, 1 + t, t, 1 + t), (2, 2, t, 2 + t) \rangle.$$

1. Determinare $A_t^{\perp}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.
2. Determinare se esistono valori t_1, t_2 del parametro t tali che esista un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ con $Ker(f) = A_{t_1}$ e $Im(f) = A_{t_2}$.
3. Posto $t = 1$, costruire, se possibile, un endomorfismo ortogonalmente diagonalizzabile g di $\mathbb{R}^4$ con $Ker(g) = A_1$ e $Im(g) = A_1^{\perp}$.
4. Posto $t = 1$, costruire, se possibile, un endomorfismo diagonalizzabile ma non ortogonalmente diagonalizzabile h di $\mathbb{R}^4$ con $Ker(h) = A_1$ e $Im(h) = A_1^{\perp}$.

(*continua*)

Esercizio 4. In un fissato sistema di riferimento cartesiano si considerino i punti $A = (1, 0, 1)$ e $B = (3, 2, 5)$

1. Determinare le equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per A e B.
2. Determinare l'asse del segmento AB.
3. Determinare le equazioni cartesiane di tutte le rette parallele al vettore $\mathbf{v} = (2, 0, -1)$, incidenti la retta r e distanti 1 dall'asse del segmento AB.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E MECCANICA

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 21-02-2011

TEMA n.2

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. Esistono infiniti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 3.
2. Le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ sono simili.
3. Nello spazio euclideo tridimensionale due rette ortogonali non sono necessariamente incidenti.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme $T = (0, 2, 0) + \langle(-1, 1, -1), (2, 0, 3)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

1. Stabilire se T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinare, se possibile, un sistema lineare di 2 equazioni in 4 incognite avente T come insieme di soluzioni.
3. Determinare, se possibile, un sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite avente T come insieme di soluzioni.
4. Determinare, se possibile, due diversi sistemi lineari aventi T come insieme di soluzioni.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (y + 1, 3z)$.

1. Stabilire se f è lineare.
2. Sia $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (0, 0)\}$. Stabilire se T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
3. Sia $W = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a, b) = f(x, y, z) \text{ per qualche } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$. Determinare il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^2$ contenente W.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$ al variare di $t \in \mathbb{R}$:

$$A_t = \langle(1, 1, 0, t), (2, 2, t, 2 + t)(t, 1, 0, 0), (1 + t, 2, t, 1 + t)\rangle.$$

1. Determinare $A_t^{\perp}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.
2. Determinare se esistono valori t_1, t_2 del parametro t tali che esista un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ con $Ker(f) = A_{t_1}$ e $Im(f) = A_{t_2}$.
3. Posto $t = 1$, costruire, se possibile, un endomorfismo ortogonalmente diagonalizzabile g di $\mathbb{R}^4$ con $Ker(g) = A_1$ e $Im(g) = A_1^{\perp}$.
4. Posto $t = 1$, costruire, se possibile, un endomorfismo diagonalizzabile ma non ortogonalmente diagonalizzabile h di $\mathbb{R}^4$ con $Ker(h) = A_1$ e $Im(h) = A_1^{\perp}$.

(*continua*)

Esercizio 4. In un fissato sistema di riferimento cartesiano si considerino i punti $A = (0, 1, 1)$ e $B = (2, 3, 5)$

1. Determinare le equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per A e B.

2. Determinare l'asse del segmento AB.

3. Determinare le equazioni cartesiane di tutte le rette parallele al vettore $\mathbf{v} = (0, 2, -1)$, incidenti la retta r e distanti 1 dall'asse del segmento AB.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E MECCANICA

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 21-02-2011

TEMA n.3

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. Esistono infiniti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 4.
2. Le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ sono simili.
3. Nello spazio euclideo tridimensionale due piani ortogonali sono necessariamente incidenti.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme $S = (1,1,1) + \langle(-1,1,1),(1,1,2)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

1. Stabilire se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinare, se possibile, un sistema lineare di 2 equazioni in 4 incognite avente S come insieme di soluzioni.
3. Determinare, se possibile, un sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite avente S come insieme di soluzioni.
4. Determinare, se possibile, due diversi sistemi lineari aventi S come insieme di soluzioni.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (z+1, 3y)$.

1. Stabilire se f è lineare.
2. Sia $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0)\}$. Stabilire se T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
3. Sia $W = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a,b) = f(x,y,z)$ per qualche $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$. Determinare il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^2$ contenente W.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$ al variare di $t \in \mathbb{R}$:

$$A_t = \langle(1,0,t,0),(1,0,1,t),(2,t,t+1,1+t),(2,t,2,2+t)\rangle.$$

1. Determinare $A_t^{\perp}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.
2. Determinare se esistono valori t_1, t_2 del parametro t tali che esista un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ con $Ker(f) = A_{t_1}$ e $Im(f) = A_{t_2}$.
3. Posto $t = 1$, costruire, se possibile, un endomorfismo ortogonalmente diagonalizzabile g di $\mathbb{R}^4$ con $Ker(g) = A_1$ e $Im(g) = A_1^{\perp}$.
4. Posto $t = 1$, costruire, se possibile, un endomorfismo diagonalizzabile ma non ortogonalmente diagonalizzabile h di $\mathbb{R}^4$ con $Ker(h) = A_1$ e $Im(h) = A_1^{\perp}$.

(*continua*)

Esercizio 4. In un fissato sistema di riferimento cartesiano si considerino i punti $A = (1, 0, 1)$ e $B = (5, 2, 3)$

1. Determinare le equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per A e B.

2. Determinare l'asse del segmento AB.

3. Determinare le equazioni cartesiane di tutte le rette parallele al vettore $\mathbf{v} = (-1, 0, 2)$, incidenti la retta r e distanti 1 dall'asse del segmento AB.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E MECCANICA

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 21-02-2011

TEMA n.4

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. Esistono infiniti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ di dimensione 5.
2. Le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ sono simili.
3. Nello spazio euclideo tridimensionale due piani ortogonali non sono necessariamente incidenti.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sottoinsieme $S = (1,1,1) + \langle (1,1,-1), (1,2,1) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

1. Stabilire se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinare, se possibile, un sistema lineare di 2 equazioni in 4 incognite avente S come insieme di soluzioni.
3. Determinare, se possibile, un sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite avente S come insieme di soluzioni.
4. Determinare, se possibile, due diversi sistemi lineari aventi S come insieme di soluzioni.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (y+1, 3x)$.

1. Stabilire se f è lineare.
2. Sia $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0)\}$. Stabilire se T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
3. Sia $W = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a,b) = f(x,y,z) \text{ per qualche } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$. Determinare il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^2$ contenente W.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$ al variare di $t \in \mathbb{R}$:

$$A_t = \langle (1,t,0,0), (1,1,t,0), (2,1+t,1+t,t), (2,2,2+t,t) \rangle.$$

1. Determinare $A_t^{\perp}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.
2. Determinare se esistono valori t_1, t_2 del parametro t tali che esista un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ con $Ker(f) = A_{t_1}$ e $Im(f) = A_{t_2}$.
3. Posto $t = 1$, costruire, se possibile, un endomorfismo ortogonalmente diagonalizzabile g di $\mathbb{R}^4$ con $Ker(g) = A_1$ e $Im(g) = A_1^{\perp}$.
4. Posto $t = 1$, costruire, se possibile, un endomorfismo diagonalizzabile ma non ortogonalmente diagonalizzabile h di $\mathbb{R}^4$ con $Ker(h) = A_1$ e $Im(h) = A_1^{\perp}$.

(*continua*)

Esercizio 4. In un fissato sistema di riferimento cartesiano si considerino i punti $A = (1, 1, 0)$ e $B = (3, 5, 2)$

1. Determinare le equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per A e B.
2. Determinare l'asse del segmento AB.
3. Determinare le equazioni cartesiane di tutte le rette parallele al vettore $\mathbf{v} = (2, -1, 0)$, incidenti la retta r e distanti 1 dall'asse del segmento AB.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate