CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 15-06-2010

I Appello

TEMA n.1

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

1) La proiezione ortogonale del vettore $(1, -1, 1)$ sul sottospazio $\langle(1, 1, 1)\rangle$ è nulla.

2) Le coordinate del vettore $(1, 1, 0)$ nella base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ di $\mathbb{R}^3$ sono $(1, 1, 0)$.

3) Ogni matrice ortogonale è invertibile.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si consideri la seguente matrice 4 per 4 dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

a) Determinare nucleo e immagine di A_α al variare del parametro α.

b) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, i vettori $(2, 0, 0, 2)$ e $(1, 0, -1, 2)$ hanno la stessa immagine mediante A_α.

c) Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice A_α è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ e per i valori trovati determinare una base di autovettori.

d) Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice A_α è ortogonalmente diagonalizzabile?

e) Esistono valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la matrice A_α sia simile ad una matrice ortogonale?

f) Stabilire se esistono valori di α tali che A_α sia simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

g) Determinare, se esistono, tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{C}$ tali che la matrice A_α abbia due coppie di autovalori complessi coniugati.

Esercizio 2. Dati i sottospazi $U = \langle(1, -1, 0)\rangle$ e $W = \langle(0, 1, -1)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$:

i) calcolare la proiezione ortogonale del sottospazio $U^\perp \cap W^\perp$ sul sottospazio $(U + W)^\perp$;

ii) determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $p_U(v) = p_W(v)$.

iii) Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $g(x, y) = (0, 2x + y, x + y)$. Determinare, se possibile, un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = 0$, $p_U(f(1, 0, 0)) = (1, -1, 0)$, $p_W(f(1, 0, 0)) = (0, 1, -1)$ e $(2, 1, 0) \in \operatorname{Im} f$.

(continua)

Esercizio 3. Si consideri la sottovarietà lineare $S_\alpha = (1, 1, \alpha) + \langle(1, 0, \alpha), (-1, 0, 1)\rangle$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare un sistema lineare che abbia S_α come insieme di soluzioni.

b) Determinare $\cap_{\alpha\in\mathbb{R}} S_\alpha$.

c) Stabilire per quali valori di α l'insieme S_α è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e determinare $\langle S_\alpha\rangle$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare un sottospazio vettoriale T di $\mathbb{R}^3$ tale che $\langle S_\alpha\rangle \oplus T = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il vettore $v = (0, -1, 0)$, il punto $P = (1, 2, 1)$ e la retta r di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1. \end{cases}$

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e parallelo al vettore v.

b) Determinare equazioni cartesiane di una retta t contenuta nel piano π, ortogonale ad r e passante per il punto P.

c) Determinare equazioni cartesiane delle rette s_1, s_2, sul piano π, bisettrici degli angoli formati dalle rette r e t.

d) Determinare equazioni cartesiane delle rette s_1, s_2 in un sistema di riferimento euclideo (X, Y, Z) in cui l'asse X sia la retta r e l'asse Y sia la retta t.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 15-06-2010

I Appello

TEMA n.2

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

1) La proiezione ortogonale del vettore $(1,1,0)$ sul sottospazio $\langle(2,4,1)\rangle$ è nulla.

2) Le coordinate del vettore $(1,0,0)$ nella base $\mathcal{B}=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ sono $(1,0,0)$.

3) Ogni matrice diagonale è invertibile.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si consideri la seguente matrice 4 per 4 dipendente dal parametro reale h:

$$B_h = \begin{pmatrix} h^2 & 0 & 0 & -h+1 \\ 0 & -h & 0 & 0 \\ 0 & -h+1 & -h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h^2 \end{pmatrix}$$

a) Determinare nucleo e immagine di B_h al variare del parametro h.

b) Stabilire per quali valori del parametri $h \in \mathbb{R}$, i vettori $(-2,0,0,0)$ e $(1,0,3,0)$ hanno la stessa immagine mediante B_h.

c) Determinare per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ la matrice B_h è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ e per i valori trovati determinare una base di autovettori.

d) Per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ la matrice B_h è ortogonalmente diagonalizzabile?

e) Esistono valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ tali che la matrice B_h sia simile ad una matrice ortogonale?

f) Stabilire se esistono valori di h tali che B_h sia simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

g) Determinare, se esistono, tutti i valori del parametro $h \in \mathbb{C}$ tali che la matrice B_h abbia due coppie di autovalori complessi coniugati.

Esercizio 2. Dati i sottospazi $U_1 = \langle(1,2,0)\rangle$ e $U_2 = \langle(0,1,2)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$:

i) calcolare la proiezione ortogonale del sottospazio $U_1^\perp \cap U_2^\perp$ sul sottospazio $(U_1+U_2)^\perp$;

ii) determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $p_{U_1}(v) = p_{U_2}(v)$.

iii) Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $g(x,y) = (0, x+2y, x+y)$. Determinare, se possibile, un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = 0$, $p_{U_1}(f(1,0,0)) = (1,2,0)$, $p_{U_2}(f(1,0,0)) = (0,1,2)$ e $(1,-1,0) \in \operatorname{Im} f$.

(continua)

Esercizio 3. Si consideri la sottovarietà lineare $S_\beta = (\beta, 2, 2) + \langle(\beta, 0, 1), (1, 0, -1)\rangle$ al variare di $\beta \in \mathbb{R}$.

a) Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ determinare un sistema lineare che abbia S_β come insieme di soluzioni.

b) Determinare $\cap_{\beta\in\mathbb{R}} S_\beta$.

c) Stabilire per quali valori di β l'insieme S_β è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e determinare $\langle S_\beta\rangle$ al variare di $\beta \in \mathbb{R}$.

d) Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ determinare un sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^3$ tale che $\langle S_\beta\rangle \oplus V = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il vettore $v = (2, 0, 0)$, il punto $P = (2, 1, 1)$ e la retta r di equazioni parametriche $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1. \end{cases}$

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e parallelo al vettore v.

b) Determinare equazioni cartesiane di una retta t contenuta nel piano π, ortogonale ad r e passante per il punto P.

c) Determinare equazioni cartesiane delle rette s_1, s_2, sul piano π, bisettrici degli angoli formati dalle rette r e t.

d) Determinare equazioni cartesiane delle rette s_1, s_2 in un sistema di riferimento euclideo (X, Y, Z) in cui l'asse Y sia la retta r e l'asse Z sia la retta t.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 15-06-2010

I Appello

TEMA n.3

Parte 1. Quesiti preliminari.
Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

1) La proiezione ortogonale del vettore $(1, 1, 0)$ sul sottospazio $\langle(1, 5, 1)\rangle$ è nulla.

2) Le coordinate del vettore $(1, 1, 1)$ nella base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ sono $(1, 1, 1)$.

3) Ogni matrice di cambiamento di base è invertibile.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si consideri la seguente matrice 4 per 4 dipendente dal parametro reale γ:

$$H_\gamma = \begin{pmatrix} \gamma^2 & 0 & 0 & \gamma+1 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma+1 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

a) Determinare nucleo e immagine di H_γ al variare del parametro γ.

b) Stabilire per quali valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$, i vettori $(3, 0, 0, 0)$ e $(-1, 0, 5, 0)$ hanno la stessa immagine mediante H_γ.

c) Determinare per quali valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ la matrice H_γ è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ e per i valori trovati determinare una base di autovettori.

d) Per quali valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ la matrice H_γ è ortogonalmente diagonalizzabile?

e) Esistono valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che la matrice H_γ sia simile ad una matrice ortogonale?

f) Stabilire se esistono valori di γ tali che H_γ sia simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

g) Determinare, se esistono, tutti i valori del parametro $\gamma \in \mathbb{C}$ tali che la matrice H_γ abbia due coppie di autovalori complessi coniugati.

Esercizio 2. Dati i sottospazi $V_1 = \langle(1, 0, -1)\rangle$ e $V_2 = \langle(1, 1, 0)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$:

i) calcolare la proiezione ortogonale del sottospazio $(V_1 + V_2)^\perp$ sul sottospazio $V_1^\perp \cap V_2^\perp$;

ii) determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $p_{V_1}(v) = p_{V_2}(v)$.

iii) Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $g(x, y) = (0, 2x + y, x + y)$. Determinare, se possibile, un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = 0$, $p_{V_1}(f(1, 0, 0)) = (1, 0, -1)$, $p_{V_2}(f(1, 0, 0)) = (1, 1, 0)$ e $(1, 0, 0) \in \operatorname{Im} f$.

(continua)

Esercizio 3. Si consideri la sottovarietà lineare $S_\gamma = (2, \gamma, 2) + \langle (0,1,1), (0, -\gamma, 1) \rangle$ al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$.

a) Per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$ determinare un sistema lineare che abbia S_γ come insieme di soluzioni.

b) Determinare $\cap_{\gamma \in \mathbb{R}} S_\gamma$.

c) Stabilire per quali valori di γ l'insieme S_γ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e determinare $\langle S_\gamma \rangle$ al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$.

d) Per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$ determinare un sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^3$ tale che $\langle S_\gamma \rangle \oplus U = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il vettore $v = (0,0,1)$, il punto $P = (1,1,2)$ e la retta r di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 - \lambda. \end{cases}$

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e parallelo al vettore v.

b) Determinare equazioni cartesiane di una retta t contenuta nel piano π, ortogonale ad r e passante per il punto P.

c) Determinare equazioni cartesiane delle rette s_1, s_2, sul piano π, bisettrici degli angoli formati dalle rette r e t.

d) Determinare equazioni cartesiane delle rette s_1, s_2 in un sistema di riferimento euclideo (X, Y, Z) in cui l'asse X sia la retta r e l'asse Z sia la retta t.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.

CORSO DI FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA - LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

Padova 15-06-2010

I Appello

TEMA n.4

Parte 1. Quesiti preliminari.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false **giustificando brevemente** la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata).

1) La proiezione ortogonale del vettore $(1,0,1)$ sul sottospazio $\langle(3,1,3)\rangle$ è nulla.

2) Le coordinate del vettore $(-1,-1,0)$ nella base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ sono $(-1,-1,0)$.

3) Ogni matrice simmetrica è invertibile.

Parte 2. Esercizi.

Esercizio 1. Si consideri la seguente matrice 4 per 4 dipendente dal parametro reale k:

$$M_k = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 & -k+1 \\ 0 & k^2 & 0 & 0 \\ 0 & -k+1 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

a) Determinare nucleo e immagine di M_k al variare del parametro k.

b) Stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$, i vettori $(-3,0,0,0)$ e $(4,0,-1,0)$ hanno la stessa immagine mediante M_k.

c) Determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice M_k è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ e per i valori trovati determinare una base di autovettori.

d) Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice M_k è ortogonalmente diagonalizzabile?

e) Esistono valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ tali che la matrice M_k sia simile ad una matrice ortogonale?

f) Stabilire se esistono valori di k tali che M_k sia simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

g) Determinare, se esistono, tutti i valori del parametro $k \in \mathbb{C}$ tali che la matrice M_k abbia due coppie di autovalori complessi coniugati.

Esercizio 2. Dati i sottospazi $S = \langle(0,1,1)\rangle$ e $T = \langle(1,1,0)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$:

i) calcolare la proiezione ortogonale del sottospazio $(S+T)^\perp$ sul sottospazio $S^\perp \cap T^\perp$;

ii) determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che si abbia $p_S(v) = p_T(v)$.

iii) Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $g(x,y) = (0, x+2y, x+y)$. Determinare, se possibile, un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = 0$, $p_S(f(1,0,0)) = (0,1,1)$, $p_T(f(1,0,0)) = (1,1,0)$ e $(0,1,0) \in \operatorname{Im} f$.

(continua)

Esercizio 3. Si consideri la sottovarietà lineare $S_\delta = (1, \delta, 1) + \langle (1, \delta, 0), (-2, 2, 0) \rangle$ al variare di $\delta \in \mathbb{R}$.

a) Per ogni $\delta \in \mathbb{R}$ determinare un sistema lineare che abbia S_δ come insieme di soluzioni.

b) Determinare $\cap_{\delta \in \mathbb{R}} S_\delta$.

c) Stabilire per quali valori di δ l'insieme S_δ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e determinare $\langle S_\delta \rangle$ al variare di $\delta \in \mathbb{R}$.

d) Per ogni $\delta \in \mathbb{R}$ determinare un sottospazio vettoriale Z di $\mathbb{R}^3$ tale che $\langle S_\delta \rangle \oplus Z = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il vettore $v = (0, -1, 0)$, il punto $P = (1, 2, 1)$ e la retta r di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - \lambda \\ z = 3 + \lambda. \end{cases}$

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e parallelo al vettore v.

b) Determinare equazioni cartesiane di una retta t contenuta nel piano π, ortogonale ad r e passante per il punto P.

c) Determinare equazioni cartesiane delle rette s_1, s_2, sul piano π, bisettrici degli angoli formati dalle rette r e t.

d) Determinare equazioni cartesiane delle rette s_1, s_2 in un sistema di riferimento euclideo (X, Y, Z) in cui l'asse Z sia la retta r e l'asse Y sia la retta t.

N.B. Ogni risposta va opportunamente giustificata.