Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E MECCANICA

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 10-04-2010

TEMA n.1

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. Siano v_1, v_2 vettori di uno spazio vettoriale V. Si ha: $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle 2v_1, 3v_2, v_1 + v_2 \rangle$.
2. In $\mathbb{R}^2$ ci sono infinite coppie di vettori linearmente indipendenti.
3. I sottospazi $S = \langle (1,1,1), (1,2,2) \rangle$ e $T = \langle (0,0,1), (1,-2,3) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$ sono in somma diretta.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$ dei polinomi di grado minore od ugale a 3: $\mathbb{R}^{\leq 3}[X] = \{p(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$, si considerino i sottoinsiemi

$$U = \{p(X) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] | \, p(0) = 0\}; \qquad W_k = \{p(X) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] | \, p(1) = k\}.$$

a) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che W_k sia un sottospazio di $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$.

b) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), scrivere una base di $U \cap W_k$.

c) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), determinare $U + W_k$. Tale somma è diretta?

d) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), scrivere, se possibile, il polinomio $1 + X$ in due modi diversi come somma di un elemento di U e di uno di W_k.

e) Calcolare $\dim < W_k >$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 Si considerino la varietà lineare S e, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema lineare Σ_α nelle variabili x, y, z, t:

$$S = (1,-1,0,0) + \langle (1,-1,0,0), (0,1,-1,0), (0,0,1,-1) \rangle,$$

$$\Sigma_\alpha : \begin{cases} x - z - t = -1 \\ x + 2y + (2\alpha + 1)z + 3t = 2\alpha - 1 \\ 3x + 4y + (3\alpha + 2)z + (\alpha + 5)t = 3\alpha - 1. \end{cases}$$

a) Scrivere un sistema lineare Σ' il cui insieme delle soluzioni sia S.

b) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali Σ' e Σ_α hanno soluzioni in comune.

c) Per i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ trovati in b), determinare le soluzioni comuni tra Σ' e Σ_α.

(*continua*)

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che:

$$f(1,2,1) = (2,2), \quad f(-1,1,1) = (0,2), \quad f(0,1,1) = (1,2), \quad f(-3,-2,-1) = (-4,-2).$$

a) Verificare che esiste una ed una sola applicazione lineare soddisfacente le condizioni richieste.

b) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$.

c) Determinare nucleo e immagine di f.

d) Determinare, se possibile, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g$ sia iniettiva.

e) Determinare, se possibile, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $h^{-1}(2,2) = (1,2,1) + \langle (0,1,0), (-1,1,1) \rangle$. Una siffatta funzione è unica? Stabilire se $Imh \subset Imf$ e/o $Kerh \supset Kerf$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l' AMBIENTE e il TERRITORIO E MECCANICA

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 10-04-2010

TEMA n.2

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. Siano v_1, v_2, v_3 vettori di uno spazio vettoriale V. Si ha: $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$.
2. $\mathbb{R}^2$ ha un numero finito di basi.
3. I sottospazi $S = \langle(1, 0, 0)\rangle$ e $T = \langle(0, 1, 2)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$ sono in somma diretta.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$ dei polinomi di grado minore od ugale a 3: $\mathbb{R}^{\leq 3}[X] = \{p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$, si considerino i sottoinsiemi

$$U = \{p(X) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] |\, p(0) = 0\}; \qquad W_k = \{p(X) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] |\, p(-1) = k\}.$$

a) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che W_k sia un sottospazio di $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$.

b) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), scrivere una base di $U \cap W_k$.

c) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), determinare $U + W_k$. Tale somma è diretta?

d) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), scrivere, se possibile, il polinomio $1 - X$ in due modi diversi come somma di un elemento di U e di uno di W_k.

e) Calcolare dim $< W_k >$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 Si considerino la varietà lineare S e, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema lineare Σ_α nelle variabili x, y, z, t:

$$S = (1, 1, 0, 0) + \langle(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\rangle$$

$$\Sigma_\alpha : \begin{cases} x - 2y + 3z - 3t = -1 \\ x + (2\alpha + 1)z + t = 2\alpha + 3 \\ 3x - 2y + (3\alpha + 4)z + (\alpha - 1)t = 3\alpha + 3. \end{cases}$$

a) Scrivere un sistema lineare Σ' il cui insieme delle soluzioni sia S.

b) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali Σ' e Σ_α hanno soluzioni in comune.

c) Per i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ trovati in b), determinare le soluzioni comuni tra Σ' e Σ_α.

(*continua*)

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che:

$$f(2,1,1) = (2,2), \quad f(1,-1,1) = (0,2), \quad f(1,0,1) = (1,2), \quad f(-2,-3,-1) = (-4,-2).$$

a) Verificare che esiste una ed una sola applicazione lineare soddisfacente le condizioni richieste.

b) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$.

c) Determinare nucleo e immagine di f.

d) Determinare, se possibile, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g$ sia iniettiva.

e) Determinare, se possibile, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $h^{-1}(0,2) = (1,-1,1) + \langle (1,0,0), (2,1,1) \rangle$. Una siffatta funzione è unica? Stabilire se $Imh \subset Imf$ e/o $Kerh \supset Kerf$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E MECCANICA

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 10-04-2010

TEMA n.3

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. Siano v_1, v_2, v_3 vettori di uno spazio vettoriale V. Si ha: $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle 2v_1, 3v_2, 4v_3, v_1 - v_2\rangle$.
2. In $\mathbb{R}^3$ ci sono infinite terne di vettori linearmente indipendenti.
3. I sottospazi $S = \langle(1,1)\rangle$ e $T = \langle(0,1)\rangle$ di $\mathbb{R}^2$ sono in somma diretta.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$ dei polinomi di grado minore od ugale a 3: $\mathbb{R}^{\leq 3}[X] = \{p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$, si considerino i sottoinsiemi

$$U = \{p(X) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] |\, p(1) = 0\}; \qquad W_k = \{p(X) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] |\, p(0) = k\}.$$

a) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che W_k sia un sottospazio di $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$.

b) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), scrivere una base di $U \cap W_k$.

c) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), determinare $U + W_k$. Tale somma è diretta?

d) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), scrivere, se possibile, il polinomio $1 + X$ in due modi diversi come somma di un elemento di U e di uno di W_k.

e) Calcolare $\dim < W_k >$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 Si considerino la varietà lineare S e, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema lineare Σ_α nelle variabili x, y, z, t:

$$S = (1, -1, 0, 0) + \langle(1, -1, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, -1)\rangle,$$

$$\Sigma_\alpha : \begin{cases} x + 2y + 3z + 3t = 1 \\ x + (2\alpha - 3)z - t = 2\alpha - 3 \\ 2x + 2y + (3\alpha - 1)z + (\alpha + 2)t = 3\alpha - 2. \end{cases}$$

a) Scrivere un sistema lineare Σ' il cui insieme delle soluzioni sia S.

b) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali Σ' e Σ_α hanno soluzioni in comune.

c) Per i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ trovati in b), determinare le soluzioni comuni tra Σ' e Σ_α.

(*continua*)

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che:

$$f(1,2,1) = (2,2), \quad f(1,1,-1) = (2,0), \quad f(1,1,0) = (2,1), \quad f(-1,-2,-3) = (-2,-4).$$

a) Verificare che esiste una ed una sola applicazione lineare soddisfacente le condizioni richieste.

b) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$.

c) Determinare nucleo e immagine di f.

d) Determinare, se possibile, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g$ sia iniettiva.

e) Determinare, se possibile, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $h^{-1}(2,2) = (1,2,1) + \langle (0,1,0), (1,1,-1) \rangle$. Una siffatta funzione è unica? Stabilire se $Imh \subset Imf$ e/o $Kerh \supset Kerf$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate

Corsi di Laurea in INGEGNERIA per l'AMBIENTE e il TERRITORIO E MECCANICA

Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria

Padova 10-04-2010

TEMA n.4

PARTE 1. Quesiti preliminari

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (risposta non giustificata = risposta non accettata):

1. Siano v_1, v_2 vettori di uno spazio vettoriale V. Si ha: $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle 2v_1, 3v_2, v_1 + v_2 \rangle$.
2. $\mathbb{R}^3$ ha un numero finito di basi.
3. I sottospazi $S = \langle (1,1,1,1) \rangle$ e $T = \langle (0,1,3,4) \rangle$ di $\mathbb{R}^4$ sono in somma diretta.

PARTE 2. Esercizi

Esercizio 1 Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$ dei polinomi di grado minore od ugale a 3: $\mathbb{R}^{\leq 3}[X] = \{p(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$, si considerino i sottoinsiemi

$$U = \{p(X) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] | \, p(-1) = 0\}; \qquad W_k = \{p(X) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[X] | \, p(0) = k\}.$$

a) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che W_k sia un sottospazio di $\mathbb{R}^{\leq 3}[X]$.

b) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), scrivere una base di $U \cap W_k$.

c) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), determinare $U + W_k$. Tale somma è diretta?

d) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ trovati in a), scrivere, se possibile, il polinomio $1 - X$ in due modi diversi come somma di un elemento di U e di uno di W_k.

e) Calcolare $\dim < W_k >$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 Si considerino la varietà lineare S e, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il sistema lineare Σ_α nelle variabili x, y, z, t:

$$S = (1,1,0,0) + \langle (1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1) \rangle,$$

$$\Sigma_\alpha : \begin{cases} x - z + t = 1 \\ x - 2y + (2\alpha + 5)z - 3t = 2\alpha + 1 \\ 2x + y + (2\alpha - 2)z + (\alpha + 4)t = 2\alpha + 4. \end{cases}$$

a) Scrivere un sistema lineare Σ' il cui insieme delle soluzioni sia S.

b) Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali Σ' e Σ_α hanno soluzioni in comune.

c) Per i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ trovati in b), determinare le soluzioni comuni tra Σ' e Σ_α.

(*continua*)

Esercizio 3 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che:

$$f(2,3,0) = (1,1), \quad f(1,1,-1) = (-1,0), \quad f(2,2,-1) = (2,1), \quad f(1,2,3) = (10,3).$$

a) Verificare che esiste una ed una sola applicazione lineare soddisfacente le condizioni richieste.

b) Scrivere la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$.

c) Determinare nucleo e immagine di f.

d) Determinare, se possibile, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g$ sia iniettiva.

e) Determinare, se possibile, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $h^{-1}(1,1) = (2,3,0) + \langle(-1,0,2),(1,1,-1)\rangle$. Una siffatta funzione è unica? Stabilire se $Imh \subset Imf$ e/o $Kerh \supset Kerf$.

Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate