Corsi di Laurea in INGEGNERIA AEROSPAZIALE E MECCANICA
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 11 luglio 2011
Svolgimento Tema n.1

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

1A Sia L_t la funzione lineare da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$ che ha $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & t \\ 0 & 1 & 0 & -t \\ t & 1 & -t & 0 \end{pmatrix}$ come matrice rispetto alle basi canoniche; si dica per quali valori di t il nucleo di L_t ha dimensione 2 e l'immagine di L_t contiene il vettore $(3, 0, 1)$.

Svolgimento. Per il Teorema delle dimensioni si ha: $\dim(\ker L_t) = 2$ se e solo se $\dim(ImL_t) = 2$, cioè se e solo se il rango della matrice assegnata è uguale a 2. Abbiamo

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & t \\ 0 & 1 & 0 & -t \\ t & 1 & -t & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & t \\ 0 & 1 & 0 & -t \\ 0 & 1-2t & 0 & -t^2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & t \\ 0 & 1 & 0 & -t \\ 0 & 0 & 0 & -3t^2+t \end{pmatrix} = 2$$

$$\Leftrightarrow t - 3t^2 = t(1-3t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ o } t = 1/3.$$

Per $t = 0$, $ImL_0 = \langle(1, 0, 0), (2, 1, 1)\rangle$. È facile verificare che il vettore $(3, 0, 1)$ non appartiene a ImL_0 poiché i vettori $\{(1, 0, 0), (2, 1, 1), (3, 0, 1)\}$ sono linearmente indipendenti. Al contrario per $t = 1/3$, $ImL_0 = \langle(1, 0, 1/3), (2, 1, 1)\rangle$ contiene $(3, 0, 1) = 3(1, 0, 1/3)$. Quindi la funzione L_t soddisfa le condizioni richieste per $t = 1/3$.

2A Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, si determinino i vettori $\mathbf{b} \in (0, 0, 2, 0) + \langle(1, 1, -1, 1)\rangle$ per i quali il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è risolubile. Si risolva infine tale sistema.

Svolgimento. Si tratta di risolvere il sistema lineare associato alla matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 2 & 0 & 1 & \alpha \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2-\alpha \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \alpha \end{array}\right),$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Riducendo la precedente matrice in forma a scala si ottiene la matrice:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha-2 \end{array}\right),$$

da cui deduciamo che il sistema ammette soluzioni se e solo se $\alpha = 1$. Per tale valore di α l'insieme delle soluzioni è: $(1, 1, 0, -2) + \langle(-1, -1, 1, 3)\rangle$.

3A. Date le due rette sghembe

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ 3y + 2z + 10 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} y = 1 \\ 3x + z = 18 \end{cases}$$

- si determini il piano α che passa per r ed è parallelo a s;
- si calcoli la distanza δ di s da α;
- si determini la retta s' di α che è la proiezione ortogonale di s su α;
- il punto $S = (6, 1, 0)$ e il punto $R = r \cap s'$ sono i punti di minima distanza fra le rette r e s?

Svolgimento. La retta s ha vettore direttore $v_s = (1, 0, -3)$. Il fascio di piani contenenti la retta r ha equazione $\lambda x + \gamma(3y + 2z + 10) = 0$ e, quindi, giacitura di equazione $\lambda x + \gamma(3y + 2z) = 0$. Uno di siffatti piani è dunque parallelo ad s se e solo se $\lambda - 6\gamma = 0$. Posto $\gamma = 1$ si ottiene $\lambda = 6$, quindi il piano α ha equazione $6x + 3y + 2z + 10 = 0$.
Poiché il piano α e la retta s sono paralleli, la distanza di s da α è la distanza di un qualsiasi punto di s dal piano α. Scelto $S = (6, 1, 0) \in s$, si ha: $dist(s, \alpha) = dist(S, \alpha) = \frac{|36+3+10|}{\sqrt{36+9+4}} = 7$.
La retta s' è data dalla intersezione del piano α con il piano π contenente s e ortogonale al piano α. Fra i piani contenenti la retta s, quindi di equazione $\beta(y - 1) + \mu(3x + z - 18) = 0$, scegliamo quello ortogonale al piano α, cioè tale che $(3\mu, \beta, \mu) \cdot (6, 3, 2) = 20\mu + 3\beta = 0$. Otteniamo così il piano π di equazione $9x - 20y + 3z - 34 = 0$.
Intersecando le rette r ed s' otteniamo il punto $R = (0, -2, -2)$. Osserviamo che il vettore $S - R = (6, 3, 2)$ è ortogonale sia alla retta r che alla retta s. Dunque S ed R sono i punti di minima distanza tra le rette s ed r.

4A. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Determinare, se esiste, una matrice ortogonale H tale che HAH^{-1} è diagonale;
determinare, se esiste, una matrice non ortogonale K tale che $K^{-1}AK$ è diagonale.

Svolgimento. La matrice A ha polinomio caratteristico $(1 - \lambda)\lambda(\lambda - 3)$ e quindi autovalori 0, 1, 3. I corrispondenti autospazi $V_\lambda = \ker(A - \lambda I_3)$ sono: $V_0 = \langle(1, 1, 1)\rangle$, $V_1 = \langle(1, -1, 0)\rangle$, $V_3 = \langle(1, 1, -2)\rangle$. Osserviamo che autospazi relativi ad autovalori diversi sono tra loro ortogonali dal momento che la matrice A è simmetrica. Una matrice K che diagonalizza A è dunque la matrice $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Tale matrice non è ortogonale perché le sue colonne non hanno norma unitaria. La matrice $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ è ortogonale perché ha sulle colonne una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ e diagonalizza A perché ha sulle colonne una base di autovettori di A. Nelle notazioni dell'esercizio (HAH^{-1} diagonale) tale matrice è $H^{-1} = H^t$. Si ha dunque $H = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

5A. Scrivere il polinomio $f(z) = z^4 - 2iz^2 + 8$ come prodotto di fattori irriducibili su $\mathbb{C}$.

Svolgimento. Risolvendo l'equazione $z^4 - 2iz^2 + 8 = 0$ come un'equazione di secondo grado nella variabile z^2 si ottengono le soluzioni $z^2 = 4i$, $z^2 = -2i$ e quindi $z_{1,2} = \pm 2\sqrt{i}$, $z_{3,4} = \pm\sqrt{2}\sqrt{-i}$. Calcoliamo dunque le radici quadrate di i e $-i$. Abbiamo $i = cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}$, quindi le radici di i sono $cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Analogamente le radici quadrate di $-i$ sono $cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non giustificate verranno ignorate.
Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta)

1B. È data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Risulta $det(A^{10}) = det(5A)$: **Vero**. Si ha infatti $det(A) = 0$ e $det(5A) = 0$. Inoltre $det(A^{10}) = (det(A))^{10} = 0$;

(b) esiste una matrice B tale che $det(A+B) = 1$. **Vero**. Basta scegliere, ad esempio, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, cosicché $A + B = I_3$.

2B. Siano u e v vettori di uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare:

(a) se $\|3u+2v\| = 0$, allora u, v sono linearmente dipendenti. **Vero**: l'unico vettore di norma nulla è il vettore nullo, dunque $3u + 2v = 0$, cioè $u = -\frac{2}{3}v$.

(b) se u è multiplo di v , allora $\|3u + 2v\| = 3\|u\| + 2\|v\|$. **Falso**: sia, ad esempio, $u = -v \neq 0$. Allora $\|3u + 2v\| = \| - v\| = \|v\| \neq 3\| - v\| + 2\|v\| = 5\|v\|$.

3B. Siano v_1, v_2, v_3, v_4 vettori di uno spazio vettoriale V di dimensione almeno 3, a due a due linearmente indipendenti. Si sa che vale $2v_1 - 2v_2 + 3v_3 + v_4 = 0$. Allora:

(a) $\langle v_2, v_3, v_4\rangle = \langle v_1, v_3, v_4\rangle = \langle v_1, v_2, v_4\rangle$. **Vero**: grazie alla relazione $2v_1 - 2v_2 + 3v_3 + v_4 = 0$, ognuno dei sottospazi indicati è $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$.

(b) Se $dim\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle = 3$ allora $3v_3+v_4$ è base di $\langle v_1, v_2\rangle \cap \langle v_3, v_4\rangle$. **Vero**: innanzitutto $3v_3+v_4 = 2v_2-2v_1$ dunque il vettore $3v_3+v_4$ appartiene a $\langle v_1, v_2\rangle \cap \langle v_3, v_4\rangle$. Per la formula di Grassmann si ha: $dim\langle v_1, v_2\rangle \cap \langle v_3, v_4\rangle = -dim\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle + dim\langle v_1, v_2\rangle + dim\langle v_3, v_4\rangle = -3+2+2 = 1$, da cui la tesi.