Corsi di Laurea in INGEGNERIA AEROSPAZIALE E MECCANICA
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 22 giugno 2011
Tema n.1

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

1A. Si considerino le seguenti sottovarietà lineari di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{L} = (1,2,3) + \langle (1,0,-1),(2,1,0)\rangle, \quad \mathcal{M} = (2,2,2) + \langle (3,1,0),(4,1,-2)\rangle.$$

Si dica se $\mathcal{L} = \mathcal{M}$. In caso contrario si determini $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$.

2A. Stabilire per quali valori del parametro reale a esiste ed è unico un endomorfismo L_a di $\mathbb{R}^3$ soddisfacente le seguente condizioni:

$$L_a(1,2,0) = (2,4,0), \quad L_a(1,2,a) = (2,4,a), \quad L_a(a,0,0) = (0,0,0).$$

Per ognuno dei valori trovati determinare $\ker L_a$ e ImL_a. Tra i valori trovati stabilire se esiste un valore di a tale che L_a sia ortogonalmente diagonalizzabile.

3A. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i punti

$$A = (2,3,3), \qquad B = (-2,2,4), \qquad C = (0,4,5).$$

a) Si verifichi che i punti A, B, C non sono allineati e si determini il piano π che li contiene;

b) si determini, se possibile, un punto D in modo che A, B, C, D siano i vertici di un quadrato;

c) si determini l'insieme di tutti e soli i punti equidistanti dai punti A, B, C, D.

4A. Si consideri la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & -1 \\ a & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro reale a. Stabilire per quali valori di a la matrice è diagonalizzabile. Esistono autovettori comuni a tutte le matrici A_a al variare di a in $\mathbb{R}$?

5A. Risolvere l'equazione $z^3\bar{z} + 3z^2 = 4$ in $\mathbb{C}$.

(*continua*)

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non giustificate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta)

1B. Siano $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)$, $v_3 = \frac{1}{2}(1,-1,1,1)$. Allora:

(a) Si può estendere $\{v_1, v_2, v_3\}$ ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ solo in due modi;

(b) esistono infiniti vettori v_4 tali che la somma di $\langle v_1, v_2\rangle$ e $\langle v_3, v_4\rangle$ sia diretta.

2B. Si consideri il sottospazio $U = \langle (1,0,3),(0,0,1)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$ e sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ una matrice avente U come autospazio. Allora:

(a) A è diagonalizzabile;

(b) anche $U^\perp$ è autospazio di A.

3B. Sia $U = \langle (1,1,0),(1,2,0)\rangle$.

(a) Esiste un solo vettore v di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su U sia $(1,3,0)$;

(b) esiste un solo vettore u di U la cui proiezione ortogonale sul sottospazio $\langle (1,2,0)\rangle$ sia $(1,2,0)$.

Corsi di Laurea in INGEGNERIA AEROSPAZIALE E MECCANICA
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 22 giugno 2011
Tema n.2

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

1A. Si considerino le seguenti sottovarietà lineari di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{L} = (1,1,1) + \langle (1,0,-1), (2,1,0) \rangle, \quad \mathcal{M} = (2,2,2) + \langle (0,1,3), (-2,1,4) \rangle.$$

Si dica se $\mathcal{L} = \mathcal{M}$. In caso contrario si determini $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$.

2A. Stabilire per quali valori del parametro reale a esiste ed è unico un endomorfismo L_a di $\mathbb{R}^3$ soddisfacente le seguente condizioni:

$$L_a(1,1,1) = (-1,-1,-1), \quad L_a(1,1,a) = (-1,-1,-a), \quad L_a(0,a-1,0) = (0,0,0).$$

Per ognuno dei valori trovati determinare $\ker L_a$ e ImL_a. Tra i valori trovati stabilire se esiste un valore di a tale che L_a sia ortogonalmente diagonalizzabile.

3A. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i punti

$$A = (0,1,2), \qquad B = (-2,2,4), \qquad C = (0,4,5).$$

a) Si verifichi che i punti A, B, C non sono allineati e si determini il piano π che li contiene;

b) si determini, se possibile, un punto D in modo che A, B, C, D siano i vertici di un quadrato;

c) si determini l'insieme di tutti e soli i punti equidistanti dai punti A, B, C, D.

4A. Si consideri la matrice

$$A_b = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & b & 0 & 0 \\ 2 & b & 2 & -2 \\ 1 & b & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro reale b. Stabilire per quali valori di b la matrice è diagonalizzabile. Esistono autovettori comuni a tutte le matrici A_b al variare di b in $\mathbb{R}$?

5A. Risolvere l'equazione $\bar{z}^3 z + 3\bar{z}^2 = 4$ in $\mathbb{C}$.

(*continua*)

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non giustificate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta)

1B. Siano $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)$, $v_3 = \frac{1}{2}(-1,1,1,1)$. Allora:

(a) Si può estendere $\{v_1, v_2, v_3\}$ ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ solo in un modo;

(b) esiste un unico vettore v_4 tale che $\langle v_1, v_2\rangle \oplus \langle v_3, v_4\rangle = \mathbb{R}^4$.

2B. Si consideri il sottospazio $U = \langle (1,1,0,0), (-1,1,0,0)\rangle$ di $\mathbb{R}^4$ e sia $A \in M_4(\mathbb{R})$ una matrice avente U come autospazio.

(a) Se $\det(A) = 0$ allora A è diagonalizzabile;

(b) se A è simmetrica allora $U^\perp$ è autospazio di A.

3B. Sia $U = \langle (0,1,1), (0,2,0)\rangle$.

(a) Esistono infiniti vettori di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su U sia $(0,3,1)$;

(b) esistono infiniti vettori di U la cui proiezione ortogonale sul sottospazio $\langle (0,2,0)\rangle$ sia $(0,1,0)$.

Corsi di Laurea in INGEGNERIA AEROSPAZIALE E MECCANICA
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 22 giugno 2011
Tema n.3

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

1A. Si considerino le seguenti sottovarietà lineari di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{L} = (1,3,2) + \langle (1,-1,0),(2,0,1)\rangle, \quad \mathcal{M} = (2,2,2) + \langle (3,0,1),(4,-2,1)\rangle.$$

Si dica se $\mathcal{L} = \mathcal{M}$. In caso contrario si determini $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$.

2A. Stabilire per quali valori del parametro reale a esiste ed è unico un endomorfismo L_a di $\mathbb{R}^3$ soddisfacente le seguente condizioni:

$$L_a(0,1,1) = (0,2,2), \quad L_a(a,1,1) = (a,2,2), \quad L_a(0,0,a) = (0,0,0).$$

Per ognuno dei valori trovati determinare $\ker L_a$ e ImL_a. Tra i valori trovati stabilire se esiste un valore di a tale che L_a sia ortogonalmente diagonalizzabile.

3A. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i punti

$$A = (2,3,3), \qquad B = (0,1,2), \qquad C = (0,4,5).$$

a) si verifichi che i punti A, B, C non sono allineati e si determini il piano π che li contiene;

b) si determini, se possibile, un punto D in modo che A, B, C, D siano i vertici di un quadrato;

c) si determini l'insieme di tutti e soli i punti equidistanti dai punti A, B, C, D.

4A. Si consideri la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & 0 \\ -2 & 2 & a & 2 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro reale a. Stabilire per quali valori di a la matrice è diagonalizzabile. Esistono autovettori comuni a tutte le matrici A_a al variare di a in $\mathbb{R}$?

5A. Risolvere l'equazione $z^3\bar{z} + 3z^2 = -4$ in $\mathbb{C}$.

(*continua*)

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non giustificate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta)

1B. Siano $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)$, $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$. Allora:

(a) Esistono infiniti modi diversi di estendere $\{v_1, v_2, v_3\}$ ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$;

(b) esiste un solo vettore v_4 tale che la somma di $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $\langle v_4 \rangle$ sia diretta.

2B. Siano $U = \langle (1,0,3) \rangle$ e $V = \langle (3,0,-1) \rangle$ autospazi di una matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$. Allora:

(a) A è simmetrica;

(b) A è diagonalizzabile.

3B. Sia $U = \langle (1,0,2), (1,0,-1) \rangle$.

(a) Esiste un solo vettore v di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su U sia $(0,0,0)$;

(b) esiste un solo vettore u di U la cui proiezione ortogonale sul sottospazio $\langle (1,0,2) \rangle$ sia $(2,0,4)$.

Corsi di Laurea in INGEGNERIA AEROSPAZIALE E MECCANICA
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 22 giugno 2011
Tema n.4

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

1A. Si considerino le seguenti sottovarietà lineari di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{L} = (2,1,3) + \langle (0,1,-1), (1,2,0) \rangle, \quad \mathcal{M} = (1,-1,2) + \langle (1,3,0), (1,4,-2) \rangle.$$

Si dica se $\mathcal{L} = \mathcal{M}$. In caso contrario si determini $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$.

2A. Stabilire per quali valori del parametro reale a esiste ed è unico un endomorfismo L_a di $\mathbb{R}^3$ soddisfacente le seguente condizioni:

$$L_a(1,-1,1) = (2,-2,2), \quad L_a(1,a,1) = (2,2a,2), \quad L_a(a+1,0,0) = (0,0,0).$$

Per ognuno dei valori trovati determinare $\ker L_a$ e ImL_a. Tra i valori trovati stabilire se esiste un valore di a tale che L_a sia ortogonalmente diagonalizzabile.

3A. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i punti

$$A = (2,3,3), \qquad B = (-2,2,4), \qquad C = (0,1,2).$$

a) si verifichi che i punti A, B, C non sono allineati e si determini il piano π che li contiene;

b) si determini, se possibile, un punto D in modo che A, B, C, D siano i vertici di un quadrato;

c) si determini l'insieme di tutti e soli i punti equidistanti dai punti A, B, C, D.

4A. Si consideri la matrice

$$A_b = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & -1 \\ b & 2 & -2 & 2 \\ b & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro reale b. Stabilire per quali valori di b la matrice è diagonalizzabile. Esistono autovettori comuni a tutte le matrici A_b al variare di b in $\mathbb{R}$?

5A. Risolvere l'equazione $\bar{z}^3 z + 3\bar{z}^2 = -4$ in $\mathbb{C}$.

(*continua*)

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non giustificate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta)

1B. Siano $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1,0)$, $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)$. Allora:

(a) esistono infiniti vettori v_4 tali che la somma di $\langle v_1 \rangle$ e $\langle v_2, v_3, v_4 \rangle$ sia diretta;

(b) esiste un solo vettore w_4 di $\mathbb{R}^4$ tale che $\{v_1, v_2, v_3, w_4\}$ sia una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

2B. Si consideri il sottospazio $U = \langle (0,1,0), (0,-1,-1) \rangle$ di $\mathbb{R}^3$ e sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ una matrice avente U come autospazio. Allora:

(a) non è detto che A sia diagonalizzabile;

(b) anche $\langle (1,0,0) \rangle$ è autospazio.

3B. Sia $U = \langle (1,0,2), (2,0,3) \rangle$.

(a) Esiste un solo vettore v di $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su U sia $(1,0,1)$;

(b) esistono infiniti vettori di U la cui proiezione ortogonale sul sottospazio $\langle (1,0,2) \rangle$ sia $(-1,0,-2)$.