Corsi di Laurea in INGEGNERIA AEROSPAZIALE E MECCANICA
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 30 aprile 2011
Tema n.1

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

1A. Siano $U = \langle (4,-1,0,1),(1,2,3,4)\rangle$ e $W = \langle (1,2,1,2),(2,1,0,1)\rangle$. Si determini una base di $U \cap W$ e la si prolunghi ad una base di $U + W$.

Svolgimento. Notiamo che $\dim U = 2$ e $\dim W = 2$. Un elemento generico di U è un vettore di $\mathbb{R}^4$ della forma $(4\alpha+\beta, -\alpha+2\beta, 3\beta, \alpha+4\beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Un siffatto elemento appartiene a W se e solo se il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4\alpha+\beta & -\alpha+2\beta & 3\beta & \alpha+4\beta \end{pmatrix}$$

è uguale a 2. Si ha:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4\alpha+\beta & -\alpha+2\beta & 3\beta & \alpha+4\beta \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & -9\alpha & -4\alpha+2\beta & -7\alpha+2\beta \end{pmatrix} =$$

$$= rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2\alpha+2\beta & 2\alpha+2\beta \end{pmatrix}.$$

Il rango della matrice ottenuta è uguale a 2 se e solo se $\alpha+\beta = 0$, cioè $\beta = -\alpha$. Gli elementi di $U \cap W$ sono dunque i vettori di $\mathbb{R}^4$ della forma $(3\alpha, -3\alpha, -3\alpha, -3\alpha)$, cioè $U \cap W = \langle (1,-1,-1,-1)\rangle$. Per la formula di Grassmann si ha $\dim(U+W) = 2+2-1 = 3$. Per completare $\{(1,-1,-1,-1)\}$ in una base di $U+W$ basta aggiungere un vettore di U linearmente indipendente da $(1,-1,-1,-1)$ ed un vettore di W linearmente indipendente da $(1,-1,-1,-1)$. Una base di $U+W$ è pertanto $\{(1,-1,-1,-1),(1,2,3,4),(1,2,1,2)\}$.

2A. Si discuta il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale a e lo si risolva nel caso in cui ci sono infinite soluzioni:

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 3 \\ x + 2y - z = a \\ x - y + 8z = 7a. \end{cases}$$

Svolgimento. La matrice completa associata al sistema è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & -1 & 8 & 7a \end{array}\right)$$

e, con alcuni passaggi, può essere ridotta nella seguente forma a scala per righe:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & -1 & 3 & 2a \\ 0 & 0 & 5-5a & -5a^2+2a+3 \end{array}\right).$$

Dunque per $a \neq 1$ il sistema ha una sola soluzione e per $a = 1$ ne ha infinite. In quest'ultimo caso l'insieme delle soluzioni è: $(5, -2, 0) + \langle(-5, 3, 1)\rangle$.

3A. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.

(ii) Determinare, se possibile, due vettori linearmente dipendenti di $\mathbb{R}^3$ che hanno la stessa immagine e due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^4$ che non appartengono all'immagine di f.

(iii) Determinare, se possibile, una funzione lineare non nulla $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = 0$ scrivendone la forma esplicita ($g(x, y, z, t) = \dots$). Una siffatta funzione è unica?

Svolgimento. (i) La funzione f non può essere suriettiva per il Teorema delle dimensioni e non è iniettiva dal momento che $rg(A) = 2$, dunque $\dim(\ker f) = 1$.
(ii) Si ha $Imf = \langle(1, 1, 0, 1), (2, 1, 1, 0)\rangle$, dunque due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^4$ che non appartengono a Imf sono, ad esempio, $(0, 0, 1, 0)$, e $(0, 0, 0, 1)$. Inoltre $\ker f = \langle(1, -2, 1)\rangle$, perciò i vettori $(1, -2, 1)$ e $(2, -4, 2)$ sono linearmente dipendenti e hanno la stessa immagine mediante f (cioè il vettore nullo di $\mathbb{R}^4$). Si noti che se $v_1 = \alpha v_2$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$, e $f(v_1) = f(v_2)$, allora $f(\alpha v_2) = \alpha f(v_2) = f(v_2)$ se e solo se $f(v_2) = f(v_1) = \mathbf{0}$.
(iii) Una funzione g come richiesta è una funzione la cui immagine è contenuta nel nucleo di f, cioè nel sottospazio $\langle(1, -2, 1)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$. Dunque esistono infinite funzioni come quella richiesta. Una di queste è: $g(x, y, z, t) = (x, -2x, x)$.

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non giustificate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta)

1B.

(a) Esiste un'unica funzione lineare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(1) = 2$; **Vero.** Per linearità si ha infatti: $f(x) = xf(1) = 2x$;

(b) esistono infinite funzioni $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $g(1) = 2$. **Vero.** Ad esempio tutte le funzioni $g_a(x) = ax + 2 - a$, con $a \in \mathbb{R}$, soddisfano la condizione $g_a(1) = 2$.

2B. Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare tale che $\ker L = \langle(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (2, 1, 2, 1)\rangle$. Allora:

(a) esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ tale che $\dim L(V) = 3$; **Falso.** Si ha $\dim(\ker L) = 2$, dal momento che $(2, 1, 2, 1) = 2(1, 0, 1, 0) + (0, 1, 0, 1)$ e i vettori $(1, 0, 1, 0)$ e $(0, 1, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti. Dunque $\dim(ImL) = 2$ per il Teorema delle dimensioni. Ne consegue che per ogni sottospazio V di $\mathbb{R}^4$, $\dim L(V) \leq 2$.

(b) esiste un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ tale che $\dim L(V) = 1$. **Vero.** Basta scegliere un sottospazio V di dimensione 1 in somma diretta con $\ker L$.

3B. Sia $S = \{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \mid a_{11}a_{12} = 0\}$ Allora:

(a) S è un sottospazio vettoriale di $M_{2,3}(\mathbb{R})$; **Falso.** S non è chiuso rispetto alla somma. Infatti S contiene le matrici $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ma non la loro somma.

(b) S non è un sottospazio vettoriale di $M_{2,3}(\mathbb{R})$ e $\langle S \rangle = M_{2,3}(\mathbb{R})$. **Vero.** Infatti $a_{11}a_{12} = 0$ se e solo se $a_{11} = 0$ oppure $a_{12} = 0$. Dunque S è l'unione dei sottospazi $S_1 = \{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \mid a_{11} = 0\}$ e $S_2 = \{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \mid a_{12} = 0\}$ di $M_{2,3}(\mathbb{R})$. Pertanto $\langle S \rangle = S_1 + S_2 = M_{2,3}(\mathbb{R})$.