Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 21 Aprile 2012
I prova parziale
SOLUZIONE Tema n.1

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare Σ_α di 3 equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3 dipendente dal parametro reale α:

$$\Sigma_\alpha : \begin{cases} \alpha x_1 + (\alpha+3)x_2 + 2\alpha x_3 = \alpha + 2 \\ \alpha x_1 + (2\alpha+2)x_2 + 3\alpha x_3 = 2\alpha + 2 \\ 2\alpha x_1 + (\alpha+7)x_2 + 4\alpha x_3 = 2\alpha + 4 \end{cases}$$

1. Determinare le soluzioni del sistema lineare Σ_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che il sistema lineare Σ_α sia equivalente ad un sistema lineare di 2 equazioni nelle tre incognite x_1, x_2, x_3.
3. Determinare le soluzioni del sistema lineare Σ_α interpretato ora come sistema lineare nelle 4 incognite x_1, x_2, x_3, x_4.

SVOLGIMENTO

1. Consideriamo la matrice completa $(A|b)$ associata al sistema lineare Σ_α

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha+3 & 2\alpha & \alpha+2 \\ \alpha & 2\alpha+2 & 3\alpha & 2\alpha+2 \\ 2\alpha & \alpha+7 & 4\alpha & 2\alpha+4 \end{array}\right)$$

e riduciamola in forma a scalini con il metodo di riduzione di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha+3 & 2\alpha & \alpha+2 \\ \alpha & 2\alpha+2 & 3\alpha & 2\alpha+2 \\ 2\alpha & \alpha+7 & 4\alpha & 2\alpha+4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha+3 & 2\alpha & \alpha+2 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha & \alpha \\ 0 & -\alpha+1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha+3 & 2\alpha & \alpha+2 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \end{array}\right).$$

Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha - 1 \neq 0$, cioè $\forall \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, si ha $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A|b) = 3$ quindi per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema Σ_α ammette un'unica soluzione $(\frac{2-\alpha}{\alpha}, 0, 1)$ e non può essere equivalente ad un sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite in quanto $\mathrm{rg}\,(A) = 3$;

se $\alpha = 0$ la matrice completa ridotta risulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e si ha $\mathrm{rg}\,(A) = 1 \neq \mathrm{rg}\,(A|b) = 2$ dunque il sistema Σ_0 non ha soluzione ed è equivalente al sistema lineare

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

infine se $\alpha = 1$ la matrice completa ridotta risulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

quindi $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A|b) = 2$ perciò il sistema Σ_1 è equivalente al sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Tale sistema ha infinite soluzione dipendenti da $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$ parametri e l'insieme delle soluzioni risulta: $(1,0,1) + \langle(-4,1,0)\rangle$.

2. Come visto sopra il sistema Σ_α è equivalente ad un sistema di 2 equazioni in 3 incognite per $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$.

3. Aggiungendo l'incognita x_4 il sistema avrà come matrice completa (ridotta) la matrice:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha & \alpha+3 & 2\alpha & 0 & \alpha+2 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \alpha \end{array}\right).$$

Quindi:

per $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ il sistema ha come soluzioni $(\frac{2-\alpha}{\alpha}, 0, 1, 0) + \langle(0,0,0,1)\rangle$

per $\alpha = 0$ il sistema non ha soluzioni;

per $\alpha = 1$ il sistema ha soluzioni $(1,0,1,0) + \langle(-4,1,0,0),(0,0,0,1)\rangle$.

Esercizio 2. Siano $U = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | \begin{cases} x+y-z-2t & = 0 \\ x+2y-z & = 0 \end{cases}\right\}$ e $W = \langle(2,0,1,0),(1,0,0,0)\rangle$ sottospazi di $\mathbb{R}^4$.

1. Si determini una base di $U \cap W$, la si prolunghi ad una base B_W di W e poi si prolunghi B_W ad una base di $\mathbb{R}^4$.

2. Si determini un sistema lineare di 3 equazioni nelle incognite x, y, z, t contenente le equazioni di U e che abbia come soluzioni $U \cap W$.

SVOLGIMENTO

1. Il sottospazio W ha dimensione 2 ed ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} y & = 0 \\ t & = 0 \end{cases}$$

quindi $U \cap W$ è dato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x+y-z-2t & = 0 \\ x+2y-z & = 0 \\ y & = 0 \\ t & = 0 \end{cases} \tag{1}$$

che sono $\langle(1,0,1,0)\rangle$ quindi $B_{U\cap W} = \{(1,0,1,0)\}$. Per prolungare la base $B_{U\cap W}$ a base di W basta aggiungere un vettore di W linearmente indipendente con $(1,0,1,0)$ ad esempio possiamo prendere $B_W = \{(1,0,1,0),(1,0,0,0)\}$. Analogamente una base di $\mathbb{R}^4$ che contiene B_W è $B_{\mathbb{R}^4} = \{(1,0,1,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$.

2. Un sistema lineare contenente le equazioni di U e che abbia come soluzioni $U \cap W$ è certamente

$$\begin{cases} x + y - z - 2t & = 0 \\ x + 2y - z & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$$

ottenuto aggiungendo alle equazioni di U un'equazione linearmente indipendente che sia soddisfatta dal vettore $(1, 0, 1, 0)$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da: $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x, z - x)$.

(a) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f e stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.

(b) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(c) Stabilire se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$, $g(1, 1, 0) = (0, 1, -1)$, $g(1, 0, 0) = (1, 0, -1)$, $g(2, 1, 2) = (1, -1, 0)$ e, in caso affermativo, se essa è unica. Nel caso g esista, definirla esplicitamente ($g(x, y, z) = \dots$).

SVOLGIMENTO

(a) Notiamo subito che essendo f un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ ad $\mathbb{R}^4$ essa non può mai essere suriettiva.

Il nucleo di f è dato dalle soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} x - y & = 0 \\ y - z & = 0 \\ z - x & = 0 \\ z - x & = 0 \end{cases}$$

quindi $\mathrm{Ker}(f) = \langle(1, 1, 1)\rangle$ e una sua base è $B_{\mathrm{Ker}(f)} = \{(1, 1, 1)\}$ perciò f non è iniettiva in quanto ha nucleo non banale. Allora $\mathrm{Im}(f) = \langle(1, 0, -1, -1), (-1, 1, 0, 0), (0, -1, 1, 1)\rangle$, ma $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ quindi per avere una base dell'immagine basta prendere due generatori linearmente indipendenti ad esempio $B_{\mathrm{Im}}(f) = \{(1, 0, -1, -1), (-1, 1, 0, 0)\}$. Notiamo infatti che $(0, -1, 1, 1) = -(1, 0, -1, -1) - (-1, 1, 0, 0)$.

(b) Essendo $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x, z - x)$ si ha: $f(1, 1, 1) = (0, 0, 0, 0)$, $f(1, 1, 0) = (0, 1, -1, -1)$ e $f(1, 0, 0) = (1, 0, -1, -1)$ perciò la matrice richiesta è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) I vettori $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$ precisamente la base $\mathcal{B}$ del punto precedente quindi esiste un'unica applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfi alle 3 condizioni:$g(1, 1, 1) = (0, 0, 0), g(1, 1, 0) = (0, 1, -1), g(1, 0, 0) = (1, 0, -1)$. Confrontando le immagini delle applicazioni lineari g e f sui vettori della base $\mathcal{B}$ è evidente che l'unica applicazione lineare soddisfacente alle 3 condizioni precedenti è $g(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$. Resta da verificare che anche l'ultima condizione $g(2, 1, 2) = (1, -1, 0)$ sia soddisfatta, infatti $g(2, 1, 2) = (2 - 1, 1 - 2, 2 - 2) = (1, -1, 0)$ quindi l'applicazione lineare richiesta esiste unica ed è definita da $g(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$.

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B. Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2.

1. I vettori x^2, x^2+1, x^2+2 formano una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

   FALSO I vettori non formano una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ in quanto sono linearmente dipendenti $-x^2 + 2(x^2+1) - (x^2+2) = 0$. È altrettanto evidente che essi non sono generatori in quanto non generano il polinomio x.

2. I vettori $x^2, (x+1)^2, (x+2)^2$ formano una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

   VERO Si consideri la base $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Allora i polinomi $x^2, (x+1)^2, (x+2)^2$ hanno coordinate rispettivamente $(0,0,1), (1,2,1), (4,4,1)$ ed essendo $\mathrm{r}g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 3$ essi formano una base.

2B.

1. Dato $V = \langle (1,0,0) \rangle$ sottospazio di $\mathbb{R}^3$ esiste un unico sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $W \oplus V = \mathbb{R}^3$.

   FALSO Ad esempio $W_1 = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$ (di equazione $x = 0$) oppure $W_2 = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$ (di equazione $x - y = 0$). In generale ogni sottospazio W di equazione $ax + by + cz = 0$ con $a \neq 0$ soddisfa la condizione $W \oplus V = \mathbb{R}^3$.

2. Siano V_1 e V_2 sottospazi di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 e $V_1 \cap V_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Allora non esiste alcun sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ tale che $T \oplus V_1 = T \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$.

   FALSO Controesempio: $V_1 = \langle (1,0,0) \rangle, V_2 = \langle (0,1,0) \rangle$ e $T = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$.

3B. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Le matrici A e B descrivono la stessa applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rispetto a basi diverse.

   FALSO Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, per ogni scelta di basi nel dominio e nel codominio il rango della matrice associata sarà pari a $\dim((\mathrm{Im}\,(f))$ dimensione dell'immagine di f. Quindi essendo i ranghi di A e B diversi: $\mathrm{rg}\,(A) = 2 \neq \mathrm{rg}\,(B) = 1$ l'affermazione è falsa.

2. Le matrici B e C descrivono la stessa applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rispetto a basi diverse.

   VERO Osserviamo che le matrici B e C hanno entrambe rango 1. Sia B la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Allora $f(x,y) = (2x+y, 2x+y, 0)$ con $\ker f = \langle (1,-2) \rangle$ e $\mathrm{Im}\, f = \langle (1,1,0) \rangle$. Cerchiamo ora una base $B_1 = \{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ e una base $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tali che la matrice associata a f rispetto a tali basi sia la matrice C cioè: $f(v_1) = 3w_1$ e $f(v_2) = w_1$. Certamente dobbiamo scegliere come w_1 un generatore dell'immagine ad esempio $w_1 = (1,1,0)$ e poi completiamo w_1 a base di $\mathbb{R}^3$: $B_2 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$. Come v_1 dobbiamo prendere un vettore di $\mathbb{R}^2$ tale che $f(v_1) = 3w_1 = (3,3,0)$ ad esempio $v_1 = (1,1)$ e come v_2 un vettore linearmente indipendente da v_1 e tale che $f(v_2) = w_1 = (1,1,0)$ ad esempio $v_2 = (1,-1)$. Allora scelta come base di $\mathbb{R}^2$ la base $B_1 = \{(1,1), (1,-1)\}$ e come base di $\mathbb{R}^3$ la base $B_2 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ la matrice associata a f rispetto a tali basi è C.