Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-5
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 11 Giugno 2012
II prova parziale
Tema n.1

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Posto $S = \langle(1,0,1),(1,1,1)\rangle$, indichiamo con $p_S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale sul sottospazio S e con $p_{S^\perp} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale sul sottospazio $S^\perp$.

1. Determinare tutti i vettori v di $\mathbb{R}^3$ tali che $p_S(v) = p_{S^\perp}(v)$.
2. Determinare tutti i vettori w di $\mathbb{R}^3$ tali che $p_S(w) = 2w$.
3. Determinare tutti i vettori z di $\mathbb{R}^3$ tali che $p_S^2(z) = p_S(z)$.

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (come base sia del dominio che del codominio) sia la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 4k+3 & 0 \\ -k+1 & 0 & 2k \\ 0 & 2k & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Si determinino tutti i valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tali che la matrice A_k sia diagonalizzabile nei numeri reali.
2. Posto $k = -4$ dimostrare che -1 è autovalore di $(A_{-4})^2$ e calcolarne il relativo autospazio.
3. Sia B la matrice:
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Per $k = -4$ le matrici A_{-4} e B sono simili in $M_3(\mathbb{C})$ cioè esiste un matrice $H \in M_3(\mathbb{C})$ invertibile tale che $H^{-1}A_{-4}H = B$?
(Suggerimento: si può giustificare la risposta senza calcolare esplicitamente H).
4. Per $k = -4$ determinare una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che B sia la matrice associata a f_{-4} rispetto alla base $\mathcal{B}$ (come base sia del dominio che del codominio) e
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Nello spazio, riferito a un sistema cartesiano ortonormale, si considerino il piano $\pi : 2x + y - 2z - 1 = 0$ e il punto $A = (1,-1,0)$ di π.

1. Si determinino le equazioni cartesiane della retta s contenuta nel piano π passante per A e ortogonale alla retta r di equazioni: $r : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases}$
2. Calcolare la retta di minima distanza fra r e s (ovvero la retta passante per i punti di minima distanza).

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B.

1. La matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,3)\}$ alla base $\mathcal{B}' = \{(-1,-1),(-1,-3)\}$ di $\mathbb{R}^2$ è:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
2. Ogni matrice di cambiamento di base è diagonalizzabile.

2B.

1. Se A e B sono matrici ortogonalmente diagonalizzabili allora anche AB è ortogonalmente diagonalizzabile.
2. Data una matrice ortogonale A esiste un vettore $v \neq 0$ tale che $Av = 2v$.

3B. Nello spazio affine tridimensionale siano date tre rette r, s, t e i due piani π_1, π_2.

1. Se r è ortogonale sia a s che a t allora s e t sono ortogonali fra loro.
2. Se due piani π_1 e π_2 sono ortogonali fra loro allora essi si intersecano in una retta.