Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-5
Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 6 Luglio 2012
II Appello
Tema n.1

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi di $M_2(\mathbb{R})$:

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rangle \quad V = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a - b - c + d = 0 \; ; \; c + d = 0 \}.$$

1. Determinare una base e dimensione per $U \cap V$ e $U + V$.
2. Determinare, se esistono, due vettori $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ linearmente indipendenti tali che

$$\langle A \rangle \oplus U = V + U = \langle B \rangle \oplus U$$

Esercizio 2. Dato il sistema lineare nelle incognite (x, y, z), $\Sigma : \begin{cases} x + 2y + z & = & 2 \\ x + y + 2z & = & 2 \\ 3y - 3z & = & 0 \end{cases}$,

1. si determinino gli eventuali valori reali di t per cui il sistema Σ risulta equivalente al sistema $\Sigma_t : \begin{cases} x + 3y & = & 1 + t^2 \\ y - tz & = & t - 1 \end{cases}$.
2. Per quali valori del parametro t il sistema dato dalle equazioni di Σ e di Σ_t ammette soluzioni?

Esercizio 3. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si consideri la retta $r_k : \begin{cases} x & = & k(t-2) \\ y & = & t \\ z & = & 2k - kt \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Verificare che il punto $P = (0, 2, 0)$ appartiene a tutte le rette r_k e determinare l'equazione cartesiana di un piano π contenente tutte le rette r_k.
2. Si determinino, se esistono, i valori del parametro reale k per cui le rette r_k hanno distanza 1 da 0.

Esercizio 4. Sia $V_0 = \langle (1, 3, 0, 0), (1, 1, 0, 0) \rangle$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e $V_1 = V_0^{\perp}$. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ tale che $V_0 = \mathrm{Ker}(f)$ e V_1 sia l'autospazio di f relativo all'autovalore 1.

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
2. Determinare $f^{-1}(\{(1, 3, 0, 0)\})$ e $f^{-1}(\{(0, 0, 0, 1)\})$.
3. L'endomorfismo f è ortogonalmente diagonalizzabile?

CONTINUA ↪

Esercizio 5. Siano $S_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y + z = 0\}$ e $S_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y = 0\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Siano p_{S_1} e p_{S_2} le proiezioni ortogonali di $\mathbb{R}^4$ su S_1 e su S_2 rispettivamente.

1. Determinare una base di $W = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid p_{S_1}(p_{S_2}(v)) = (0, 0, 0, 0)\}$.
2. Stabilire se esistono vettori non nulli $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $p_{S_1}(p_{S_2}(v)) = v$.

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B. Si considerino i numeri complessi $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ e $z_3 = i$

1. Il modulo del numero complesso $z_1 z_2 z_3$ è 3.
2. Il prodotto $z_1 z_2 z_3 \overline{z}_1 \overline{z}_2 \overline{z}_3$ è un numero reale.

2B. Sia A una matrice quadrata di ordine 4:

1. Se rango di A è 4, allora 0 non è autovalore di A.
2. Se il polinomio caratteristico di A è $(x^2 - 1)^2$, A è diagonalizzabile.

3B. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare iniettiva.

1. Esiste $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.
2. Esiste $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non nulla tale che $h \circ f = 0$.

Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-5
Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 6 Luglio 2012
II Appello
Tema n.2

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi di $M_2(\mathbb{R})$:

$$U = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle \quad V = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a - b - c = 0 \; ; \; a + d = 0 \}.$$

1. Determinare una base e dimensione per $U \cap V$ e $U + V$.
2. Determinare, se esistono, due vettori $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ linearmente indipendenti tali che

$$\langle A \rangle \oplus U = V + U = \langle B \rangle \oplus U$$

Esercizio 2. Dato il sistema lineare nelle incognite (x, y, z), $\Sigma : \begin{cases} x + y + 2z & = & 2 \\ 2x + y + z & = & 2 \\ 2x - 2z & = & 0 \end{cases}$,

1. si determinino gli eventuali valori reali di t per cui il sistema Σ risulta equivalente al sistema $\Sigma_t : \begin{cases} 3x + y & = & 1 + t^2 \\ x - tz & = & t - 1 \end{cases}$.
2. Per quali valori del parametro t il sistema dato dalle equazioni di Σ e di Σ_t ammette soluzioni?

Esercizio 3. Per ogni $h \in \mathbb{R}$ si consideri la retta $r_h : \begin{cases} x & = & h(t-3) \\ y & = & t \\ z & = & 3h - ht \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Verificare che il punto $P = (0, 3, 0)$ appartiene a tutte le rette r_h e determinare l'equazione cartesiana di un piano π contenente tutte le rette r_h.
2. Si determinino, se esistono, i valori del parametro reale h per cui le rette r_h hanno distanza 1 da 0.

Esercizio 4. Sia $V_0 = \langle (0, 0, 1, 3), (0, 0, 1, 1) \rangle$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e $V_1 = V_0^\perp$. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ tale che $V_0 = \mathrm{Ker}(f)$ e V_1 sia l'autospazio di f relativo all'autovalore 1.

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
2. Determinare $f^{-1}(\{(0, 0, 1, 3)\})$ e $f^{-1}(\{(0, 1, 0, 0)\})$.
3. L'endomorfismo f è ortogonalmente diagonalizzabile?

CONTINUA ↪

Esercizio 5. Siano $S_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + 3z + t = 0\}$ e $S_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3y - z = 0\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Siano p_{S_1} e p_{S_2} le proiezioni ortogonali di $\mathbb{R}^4$ su S_1 e su S_2 rispettivamente.

1. Determinare una base di $W = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid p_{S_1}(p_{S_2}(v)) = (0, 0, 0, 0)\}$.
2. Stabilire se esistono vettori non nulli $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $p_{S_1}(p_{S_2}(v)) = v$.

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B. Si considerino i numeri complessi $z_1 = \sqrt{2}(1 - i)$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ e $z_3 = -2i$

1. Il modulo del numero complesso $z_1 z_2 z_3$ è 4.
2. Il prodotto $z_1 z_2 z_3 \overline{z}_1 \overline{z}_2 \overline{z}_3$ è un numero reale.

2B. Sia A una matrice quadrata di ordine 4:

1. Se rango di A è 4, allora 0 è autovalore di A.
2. Se il polinomio caratteristico di A è $(x^2 - 4)^2$, A è diagonalizzabile.

3B. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare iniettiva.

1. Esiste $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.
2. Esiste $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non nulla tale che $h \circ f = 0$.

Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-5
Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 6 Luglio 2012
II Appello
Tema n.3

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi di $M_2(\mathbb{R})$:

$$U = \langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle \quad V = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b-c-d=0 \ ; \ b+d=0\}.$$

1. Determinare una base e dimensione per $U \cap V$ e $U+V$.
2. Determinare, se esistono, due vettori $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ linearmente indipendenti tali che

$$\langle A \rangle \oplus U = V + U = \langle B \rangle \oplus U$$

Esercizio 2. Dato il sistema lineare nelle incognite (x, y, z), $\Sigma : \begin{cases} x+y+2z &= 2 \\ 2x+y+z &= 2 \\ 3x-3z &= 0 \end{cases}$,

1. si determinino gli eventuali valori reali di t per cui il sistema Σ risulta equivalente al sistema $\Sigma_t : \begin{cases} 3x+y &= 1+t^2 \\ tx-z &= 1-t \end{cases}$.
2. Per quali valori del parametro t il sistema dato dalle equazioni di Σ e di Σ_t ammette soluzioni?

Esercizio 3. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si consideri la retta $r_k : \begin{cases} x &= k(t-4) \\ y &= 4k-kt \\ z &= t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Verificare che il punto $P = (0, 0, 4)$ appartiene a tutte le rette r_k e determinare l'equazione cartesiana di un piano π contenente tutte le rette r_k.
2. Si determinino, se esistono, i valori del parametro reale k per cui le rette r_k hanno distanza 2 da 0.

Esercizio 4. Sia $V_0 = \langle (3, 1, 0, 0), (-1, 1, 0, 0) \rangle$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e $V_1 = V_0^{\perp}$. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ tale che $V_0 = \mathrm{Ker}(f)$ e V_1 sia l'autospazio di f relativo all'autovalore 1.

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
2. Determinare $f^{-1}(\{(3, 1, 0, 0)\})$ e $f^{-1}(\{(0, 0, 1, 0)\})$.
3. L'endomorfismo f è ortogonalmente diagonalizzabile?

CONTINUA ↪

Esercizio 5. Siano $S_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z = 0\}$ e $S_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + 2z = 0\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Siano p_{S_1} e p_{S_2} le proiezioni ortogonali di $\mathbb{R}^4$ su S_1 e su S_2 rispettivamente.

1. Determinare una base di $W = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid p_{S_1}(p_{S_2}(v)) = (0, 0, 0, 0)\}$.
2. Stabilire se esistono vettori non nulli $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $p_{S_1}(p_{S_2}(v)) = v$.

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B. Si considerino i numeri complessi $z_1 = 1 - i$, $z_2 = \frac{3}{5} - i\frac{4}{5}$ e $z_3 = \sqrt{2}i$

1. Il modulo del numero complesso $z_1 z_2 z_3$ è 2.
2. Il prodotto $z_1 z_2 z_3 \overline{z}_1 \overline{z}_2 \overline{z}_3$ è un numero reale.

2B. Sia A una matrice quadrata di ordine 4:

1. Se rango di A è 4, allora 0 non è autovalore di A.
2. Se il polinomio caratteristico di A è $(x^2 - 9)^2$, A è diagonalizzabile.

3B. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare iniettiva.

1. Esiste $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.
2. Esiste $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non nulla tale che $h \circ f = 0$.

Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-5
Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 6 Luglio 2012
II Appello
Tema n.4

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi di $M_2(\mathbb{R})$:

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle \quad V = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a-b-c+d=0 \ ; \ b+d=0 \}.$$

1. Determinare una base e dimensione per $U \cap V$ e $U+V$.
2. Determinare, se esistono, due vettori $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ linearmente indipendenti tali che

$$\langle A \rangle \oplus U = V + U = \langle B \rangle \oplus U$$

Esercizio 2. Dato il sistema lineare nelle incognite (x, y, z), $\Sigma : \begin{cases} x+y+2z &= 2 \\ x+2y+z &= 2 \\ y-z &= 0 \end{cases}$,

1. si determinino gli eventuali valori reali di t per cui il sistema Σ risulta equivalente al sistema $\Sigma_t : \begin{cases} x+3z &= 1+t^2 \\ y-tz &= t-1 \end{cases}$.
2. Per quali valori del parametro t il sistema dato dalle equazioni di Σ e di Σ_t ammette soluzioni?

Esercizio 3. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si consideri la retta $r_a : \begin{cases} x &= a(t+2) \\ y &= t \\ z &= 2a+at \end{cases}$, $\quad t \in \mathbb{R}$.

1. Verificare che il punto $P = (0, -2, 0)$ appartiene a tutte le rette r_a e determinare l'equazione cartesiana di un piano π contenente tutte le rette r_a.
2. Si determinino, se esistono, i valori del parametro reale a per cui le rette r_a hanno distanza 1 da 0.

Esercizio 4. Sia $V_0 = \langle (1, -3, 0, 0), (-1, 1, 0, 0) \rangle$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e $V_1 = V_0^\perp$. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ tale che $V_0 = \mathrm{Ker}(f)$ e V_1 sia l'autospazio di f relativo all'autovalore 1.

1. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
2. Determinare $f^{-1}(\{(1, -3, 0, 0)\})$ e $f^{-1}(\{(0, 0, 1, 0)\})$.
3. L'endomorfismo f è ortogonalmente diagonalizzabile?

CONTINUA ↪

Esercizio 5. Siano $S_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y + t = 0\}$ e $S_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y = 0\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Siano p_{S_1} e p_{S_2} le proiezioni ortogonali di $\mathbb{R}^4$ su S_1 e su S_2 rispettivamente.

1. Determinare una base di $W = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid p_{S_1}(p_{S_2}(v)) = (0, 0, 0, 0)\}$.
2. Stabilire se esistono vettori non nulli $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $p_{S_1}(p_{S_2}(v)) = v$.

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B. Si considerino i numeri complessi $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ e $z_3 = -\sqrt{3}i$

1. Il modulo del numero complesso $z_1 z_2 z_3$ è 3.
2. Il prodotto $z_1 z_2 z_3 \overline{z}_1 \overline{z}_2 \overline{z}_3$ è un numero reale.

2B. Sia A una matrice quadrata di $M_4(\mathbb{R})$:

1. Se rango di A è 4, allora 0 è autovalore di A.
2. Il polinomio caratteristico di A non può essere $x^4 - 1$.

3B. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare iniettiva.

1. Esiste $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.
2. Esiste $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non nulla tale che $h \circ f = 0$.