Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-5
Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 12 Settembre 2012
I Appello
Tema n.1

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & k \\ 0 & k^2 & 0 \end{pmatrix}$$

con $k \in \mathbb{R}$.

1. Si determinino, se esistono, tutti i valori del parametro reale k tali che la matrice A_k sia ortogonale.
2. Si determinino, se esistono, tutti i valori del parametro reale k tali che la matrice A_k sia diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.
3. Si determinino, se esistono, tutti valori del parametro reale k tali che la matrice A_k sia ortogonalmente diagonalizzabile e per tali valori determinare una matrice ortogonale H che la diagonalizzi.

Esercizio 2. Date $\mathcal{B} = \{(1,5,1),(2,1,0),(1,2,0)\}$ base di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = \{(2,1),(0,1)\}$ base di $\mathbb{R}^2$ si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che la matrice ad essa associata rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sia la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare una base per $\mathrm{Ker}(f)$ ed una base per $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Costruire, definendola su una base, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ e calcolarne la matrice associata rispetto alle basi assegnate.

Esercizio 3. Sia Σ il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t:

$$\begin{cases} x - 2y + z + 2t = 1 \\ x - y - z = 0 \\ x - 3y + 3z + 4t = 2 \end{cases}$$

e sia $S = (1,1,0,1) + \langle (2,1,1,-1/2) \rangle$.

(a) Stabilire se S è l'insieme delle soluzioni del sistema Σ;

(b) determinare $S \cap \Sigma$;

(c) determinare, se possibile, un sistema lineare di 4 equazioni avente S come insieme di soluzioni.

(*continua*)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori

$$\mathbf{u}_1 = (1, -1, 0, 0),\ \mathbf{u}_2 = (2, 2, 0, 0),\ \mathbf{u}_3 = (0, 0, -2, -2), \mathbf{u}_4 = (0, 0, 3, 4).$$

1. Dopo aver verificato che $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$, si determinino le coordinate di $\mathbf{t} = (-2, 0, 1, 1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
2. Si calcolino le proiezioni ortogonali $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbf{t}$ su $\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \rangle$ e su $\langle \mathbf{u}_1 \rangle$ rispettivamente.

Esercizio 5. Si consideri il fascio di piani $\pi_k : kx + y - kz = k$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

1. Determinare il valore del parametro k tale che il piano π_k sia ortogonale all'asse delle y.
2. Calcolare la distanza fra il piano π_k e la retta $r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.
3. Data la retta $s : \begin{cases} -x + y + z = -1 \\ x = 0 \end{cases}$ determinare la distanza fra r ed s.

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B. Dato il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$:

1. $\frac{\sqrt{2}e^{i\pi}}{e^{i\pi/4}}(1 + i)$ è un numero reale;
2. le soluzioni dell'equazione $z^3 = i$ sono $e^{i\pi/2}, e^{i11\pi/6}, e^{i7\pi/6}$.

2B. Si considerino le rette r e s_k contenute in due piani paralleli:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ x - z = 1 \end{cases} \qquad s_k : \begin{cases} x = 0 \\ ky + z = k \end{cases}$$

1. Le rette r e s_k sono sghembe per ogni $k \in \mathbb{R}$;
2. la distanza fra r e s_k è 1 per ogni $k \in \mathbb{R}$.

3B. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ e sia $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato ad A rispetto alla base canonica (sia nel dominio che nel dominio).

1. Se A è ortogonale e $\det(A) > 0$, allora esiste un'unica applicazione lineare L_A tale che $L_A(1, 0, 0) = (0, 0, 1)$, $L_A(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$.
2. Se A è simmetrica e $\det(A) > 0$, allora esiste un'unica applicazione lineare L_A tale che $L_A(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $L_A(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$.

Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-5
Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 12 Settembre 2012
I Appello
Tema n.2

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & 0 & -k \\ 0 & k^2 & 0 \end{pmatrix}$$

con $k \in \mathbb{R}$.

1. Si determinino, se esistono, tutti i valori del parametro reale k tali che la matrice A_k sia ortogonale.
2. Si determinino, se esistono, tutti i valori del parametro reale k tali che la matrice A_k sia diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.
3. Si determinino, se esistono, tutti valori del parametro reale k tali che la matrice A_k sia ortogonalmente diagonalizzabile e per tali valori determinare una matrice ortogonale H che la diagonalizzi.

Esercizio 2. Date $\mathcal{B} = \{(1,3,1),(2,2,0),(-1,2,0)\}$ base di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = \{(1,1),(0,-1)\}$ base di $\mathbb{R}^2$ si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che la matrice ad essa associata rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sia la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare una base per $\mathrm{Ker}(f)$ ed una base per $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Costruire, definendola su una base, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ e calcolarne la matrice associata rispetto alle basi assegnate.

Esercizio 3. Sia Σ il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t:

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -2x + y + z + 2t = 1 \\ -3x + y + 3z + 4t = 2 \end{cases}$$

e sia $S = (1,1,0,1) + \langle (1,2,1,-1/2) \rangle$.

(a) Stabilire se S è l'insieme delle soluzioni del sistema Σ;

(b) determinare $S \cap \Sigma$;

(c) determinare, se possibile, un sistema lineare di 4 equazioni avente S come insieme di soluzioni.

(*continua*)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori

$$\mathbf{u}_1 = (-1, 1, 0, 0),\ \mathbf{u}_2 = (2, 2, 0, 0),\ \mathbf{u}_3 = (0, 0, -1, -1), \mathbf{u}_4 = (0, 0, 4, 3).$$

1. Dopo aver verificato che $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$, si determinino le coordinate di $\mathbf{t} = (0, -2, 1, 1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
2. Si calcolino le proiezioni ortogonali $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbf{t}$ su $\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \rangle$ e su $\langle \mathbf{u}_1 \rangle$ rispettivamente.

Esercizio 5. Si consideri il fascio di piani $\pi_k : x + ky - kz = k$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

1. Determinare il valore del parametro k tale che il piano π_k sia ortogonale all'asse delle x.
2. Calcolare la distanza fra il piano π_k e la retta $r : \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.
3. Data la retta $s : \begin{cases} x - y + z = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ determinare la distanza fra r ed s.

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B. Dato il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$:

1. $\frac{\sqrt{2}e^{i\pi}}{e^{i\pi/4}}(1 + i)$ è un numero immaginario puro;
2. le soluzioni dell'equazione $z^3 = -i$ sono $e^{-i\pi/2}, e^{i11\pi/6}, e^{i7\pi/6}$.

2B. Si considerino le rette r e s_k contenute in due piani paralleli:

$$r : \begin{cases} y = 1 \\ y - z = 1 \end{cases} \qquad s_k : \begin{cases} y = 0 \\ kx + z = k \end{cases}$$

1. Le rette r e s_k sono sghembe per ogni $k \in \mathbb{R}$;
2. la distanza fra r e s_k è 1 per ogni $k \in \mathbb{R}$.

3B. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ e sia $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato ad A rispetto alla base canonica (sia nel dominio che nel dominio).

1. Se A è ortogonale e $\det(A) > 0$, allora esiste un'unica applicazione lineare L_A tale che $L_A(1, 0, 0) = (0, 0, -1)$, $L_A(0, 1, 0) = (0, -1, 0)$.
2. Se A è simmetrica e $\det(A) > 0$, allora esiste un'unica applicazione lineare L_A tale che $L_A(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$, $L_A(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$.

Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-5
Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 12 Settembre 2012
I Appello
Tema n.3

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & k^2 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$

con $k \in \mathbb{R}$.

1. Si determinino, se esistono, tutti i valori del parametro reale k tali che la matrice A_k sia ortogonale.
2. Si determinino, se esistono, tutti i valori del parametro reale k tali che la matrice A_k sia diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.
3. Si determinino, se esistono, tutti valori del parametro reale k tali che la matrice A_k sia ortogonalmente diagonalizzabile e per tali valori determinare una matrice ortogonale H che la diagonalizzi.

Esercizio 2. Date $\mathcal{B} = \{(1,3,-1), (-2,2,0), (1,1,0)\}$ base di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = \{(1,-1), (0,2)\}$ base di $\mathbb{R}^2$ si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che la matrice ad essa associata rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sia la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare una base per $\mathrm{Ker}(f)$ ed una base per $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Costruire, definendola su una base, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ e calcolarne la matrice associata rispetto alle basi assegnate.

Esercizio 3. Sia Σ il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t:

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x + y - 2z + 2t = 1 \\ 3x + y - 3z + 4t = 2 \end{cases}$$

e sia $S = (0,1,1,1) + \langle (1,2,1,-1/2) \rangle$.

(a) Stabilire se S è l'insieme delle soluzioni del sistema Σ;

(b) determinare $S \cap \Sigma$;

(c) determinare, se possibile, un sistema lineare di 4 equazioni avente S come insieme di soluzioni.

(*continua*)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori

$$\mathbf{u}_1 = (-1, 0, 1, 0),\ \mathbf{u}_2 = (2, 0, 2, 0),\ \mathbf{u}_3 = (0, -1, 0, -1), \mathbf{u}_4 = (0, 4, 0, 3).$$

1. Dopo aver verificato che $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$, si determinino le coordinate di $\mathbf{t} = (0, -2, 1, 1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
2. Si calcolino le proiezioni ortogonali $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbf{t}$ su $\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \rangle$ e su $\langle \mathbf{u}_1 \rangle$ rispettivamente.

Esercizio 5. Si consideri il fascio di piani $\pi_k : -kx + ky + z = k$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

1. Determinare il valore del parametro k tale che il piano π_k sia ortogonale all'asse delle z.
2. Calcolare la distanza fra il piano π_k e la retta $r : \begin{cases} 2y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.
3. Data la retta $s : \begin{cases} x - y + z = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ determinare la distanza fra r ed s.

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B. Dato il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$:

1. $\frac{\sqrt{2}e^{i\pi}}{e^{i\pi/4}}(-1 - i)$ è un numero immaginario puro;
2. le soluzioni dell'equazione $z^3 = -i$ sono $e^{-i\pi/2}, e^{i11\pi/6}, e^{i7\pi/6}$.

2B. Si considerino le rette r e s_k contenute in due piani paralleli:

$$r : \begin{cases} z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases} \qquad s_k : \begin{cases} z = 0 \\ kx + y = k \end{cases}$$

1. Le rette r e s_k sono sghembe per ogni $k \in \mathbb{R}$;
2. la distanza fra r e s_k è 1 per ogni $k \in \mathbb{R}$.

3B. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ e sia $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato ad A rispetto alla base canonica (sia nel dominio che nel dominio).

1. Se A è ortogonale e $\det(A) < 0$, allora esiste un'unica applicazione lineare L_A tale che $L_A(1, 0, 0) = (0, 0, -1)$, $L_A(0, 1, 0) = (0, -1, 0)$.
2. Se A è simmetrica e $\det(A) < 0$, allora esiste un'unica applicazione lineare L_A tale che $L_A(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$, $L_A(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$.

Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-5
Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 12 Settembre 2012
I Appello
Tema n.4

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & 0 & k^2 \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix}$$

con $k \in \mathbb{R}$.

1. Si determinino, se esistono, tutti i valori del parametro reale k tali che la matrice A_k sia ortogonale.
2. Si determinino, se esistono, tutti i valori del parametro reale k tali che la matrice A_k sia diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.
3. Si determinino, se esistono, tutti valori del parametro reale k tali che la matrice A_k sia ortogonalmente diagonalizzabile e per tali valori determinare una matrice ortogonale H che la diagonalizzi.

Esercizio 2. Date $\mathcal{B} = \{(1, 3, 1), (0, 2, 2), (0, 2, -1)\}$ base di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (-1, 0)\}$ base di $\mathbb{R}^2$ si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che la matrice ad essa associata rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sia la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare una base per $\mathrm{Ker}(f)$ ed una base per $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Costruire, definendola su una base, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ e calcolarne la matrice associata rispetto alle basi assegnate.

Esercizio 3. Sia Σ il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t:

$$\begin{cases} -x + y - t = 0 \\ -2x + y + 2z + t = 1 \\ -3x + y + 4z + 3t = 2 \end{cases}$$

e sia $S = (1, 1, 1, 0) + \langle (1, 2, -1/2, 1) \rangle$.

(a) Stabilire se S è l'insieme delle soluzioni del sistema Σ;

(b) determinare $S \cap \Sigma$;

(c) determinare, se possibile, un sistema lineare di 4 equazioni avente S come insieme di soluzioni.

(*continua*)

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori

$$\mathbf{u}_1 = (-1, 0, 0, 1),\ \ \mathbf{u}_2 = (2, 0, 0, 2),\ \ \mathbf{u}_3 = (0, -1, -1, 0), \mathbf{u}_4 = (0, 3, 4, 0).$$

1. Dopo aver verificato che $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$, si determinino le coordinate di $\mathbf{t} = (1, -2, 1, 0)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
2. Si calcolino le proiezioni ortogonali $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di $\mathbf{t}$ su $\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \rangle$ e su $\langle \mathbf{u}_1 \rangle$ rispettivamente.

Esercizio 5. Si consideri il fascio di piani $\pi_k : x - ky + kz = k$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

1. Determinare il valore del parametro k tale che il piano π_k sia ortogonale all'asse delle x.
2. Calcolare la distanza fra il piano π_k e la retta $r : \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.
3. Data la retta $s : \begin{cases} x + y - z = -1 \\ z = 0 \end{cases}$ determinare la distanza fra r ed s.

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B. Dato il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$:

1. $\frac{\sqrt{2}e^{i\pi}}{e^{i\pi/4}}(2 + 2i)$ è un numero reale;
2. le soluzioni dell'equazione $z^3 = i$ sono $e^{i\pi/2}, e^{i11\pi/6}, e^{i7\pi/6}$.

2B. Si considerino le rette r e s_k contenute in due piani paralleli:

$$r : \begin{cases} y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \qquad s_k : \begin{cases} y = 0 \\ x + kz = k \end{cases}$$

1. Le rette r e s_k sono sghembe per ogni $k \in \mathbb{R}$;
2. la distanza fra r e s_k è 1 per ogni $k \in \mathbb{R}$.

3B. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ e sia $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato ad A rispetto alla base canonica (sia nel dominio che nel dominio).

1. Se A è ortogonale e $\det(A) < 0$, allora esiste un'unica applicazione lineare L_A tale che $L_A(1, 0, 0) = (0, 0, 1)$, $L_A(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$.
2. Se A è simmetrica e $\det(A) < 0$, allora esiste un'unica applicazione lineare L_A tale che $L_A(1, 0, 0) = (-2, 0, 0)$, $L_A(0, 1, 0) = (0, -2, 0)$.