Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-5
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 21 Aprile 2012
I prova parziale
Tema n.1

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare Σ_α di 3 equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3 dipendente dal parametro reale α:

$$\Sigma_\alpha : \begin{cases} \alpha x_1 + (\alpha+3)x_2 + 2\alpha x_3 = \alpha + 2 \\ \alpha x_1 + (2\alpha+2)x_2 + 3\alpha x_3 = 2\alpha + 2 \\ 2\alpha x_1 + (\alpha+7)x_2 + 4\alpha x_3 = 2\alpha + 4 \end{cases}$$

1. Determinare le soluzioni del sistema lineare Σ_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che il sistema lineare Σ_α sia equivalente ad un sistema lineare di 2 equazioni nelle tre incognite x_1, x_2, x_3.
3. Determinare le soluzioni del sistema lineare Σ_α interpretato ora come sistema lineare nelle 4 incognite x_1, x_2, x_3, x_4.

Esercizio 2. Siano $U = \left\{(x, y, z, t) | \begin{cases} x + y - z - 2t & = 0 \\ x + 2y - z & = 0 \end{cases} \right\}$ e $W = \langle (2, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0) \rangle$ sottospazi di $\mathbb{R}^4$.

1. Si determini una base di $U \cap W$, la si prolunghi ad una base B_W di W e poi si prolunghi B_W ad una base di $\mathbb{R}^4$.
2. Si determini un sistema lineare di 3 equazioni nelle incognite x, y, z, t contenente le equazioni di U e che abbia come soluzioni $U \cap W$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da: $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x, z - x)$.

(a) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f e stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.

(b) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(c) Stabilire se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$, $g(1, 1, 0) = (0, 1, -1)$, $g(1, 0, 0) = (1, 0, -1)$, $g(2, 1, 2) = (1, -1, 0)$ e, in caso affermativo, se essa è unica. Nel caso g esista, definirla esplicitamente ($g(x, y, z) = \dots$).

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B. Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2.

1. I vettori x^2, x^2+1, x^2+2 formano una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.
2. I vettori $x^2, (x+1)^2, (x+2)^2$ formano una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

2B.

1. Dato $V = \langle (1,0,0) \rangle$ sottospazio di $\mathbb{R}^3$ esiste un unico sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $W \oplus V = \mathbb{R}^3$.
2. Siano V_1 e V_2 sottospazi di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 e $V_1 \cap V_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Allora non esiste alcun sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ tale che $T \oplus V_1 = T \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$.

3B. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Le matrici A e B descrivono la stessa applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rispetto a basi diverse.
2. Le matrici B e C descrivono la stessa applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rispetto a basi diverse.

Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-5
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 21 Aprile 2012
I prova parziale
Tema n.2

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare Σ_β di 3 equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3 dipendente dal parametro reale β:

$$\Sigma_\beta : \begin{cases} \beta x_1 + (\beta+2)x_2 - \beta x_3 = \beta + 1 \\ \beta x_1 + (2\beta+1)x_2 - 2\beta x_3 = 1 \\ 2\beta x_1 + (\beta+5)x_2 = 4\beta + 2 \end{cases}$$

1. Determinare le soluzioni del sistema lineare Σ_β al variare di $\beta \in \mathbb{R}$.
2. Determinare tutti i valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ tale che il sistema lineare Σ_β sia equivalente ad un sistema lineare di 2 equazioni nelle tre incognite x_1, x_2, x_3.
3. Determinare le soluzioni del sistema lineare Σ_β interpretato ora come sistema nelle 4 incognite x_1, x_2, x_3, x_4.

Esercizio 2. Siano $S = \left\{ (x, y, z, t) | \begin{cases} x + 2y - z - t &= 0 \\ x - z - 2t &= 0 \end{cases} \right\}$ e $T = \langle (1, 0, 2, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle$ sottospazi di $\mathbb{R}^4$.

1. Si determini una base di $S \cap T$, la si prolunghi ad una base B_T di T e poi si prolunghi B_T ad una base di $\mathbb{R}^4$.
2. Si determini un sistema lineare di 3 equazioni nelle incognite x, y, z, t contenente le equazioni di S e che abbia come soluzioni $S \cap T$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da: $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z, x - z)$.

(a) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f e stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.

(b) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1, 1, -1), (1, -1, 0), (1, 0, 0)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(c) Stabilire se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(1, 1, -1) = (2, 0, 2)$, $g(1, -1, 0) = (0, -1, 1)$, $g(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$, $g(2, -3, 1) = (-1, -2, 1)$ e, in caso affermativo, se essa è unica. Nel caso g esista, definirla esplicitamente ($g(x, y, z) = \dots$).

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B.

1. Dato $S = \langle (0,1,0) \rangle$ sottospazio di $\mathbb{R}^3$ esiste un unico sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ tale che $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.
2. Siano S_1 e S_2 sottospazi di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 in somma diretta. Allora non esiste alcun sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $W \oplus S_1 = W \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$.

2B. Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2.

1. I vettori $x^2, x^2 - 1, x^2 - 2$ formano una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.
2. I vettori $x^2, (x-1)^2, (x-2)^2$ formano una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

3B. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Le matrici A e B descrivono la stessa applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rispetto a basi diverse.
2. Le matrici B e C descrivono la stessa applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rispetto a basi diverse.

Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-5
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 21 Aprile 2012
I prova parziale
Tema n.3

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare Σ_γ di 3 equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3 dipendente dal parametro reale γ:

$$\Sigma_\gamma : \begin{cases} \gamma x_1 + (\gamma - 3)x_2 - 2\gamma x_3 = \gamma + 1 \\ \gamma x_1 + (2\gamma - 4)x_2 - \gamma x_3 = 2\gamma + 1 \\ 2\gamma x_1 + (\gamma - 5)x_2 - 4\gamma x_3 = 2\gamma + 2 \end{cases}$$

1. Determinare le soluzioni del sistema lineare Σ_γ al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$.
2. Determinare tutti i valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che il sistema lineare Σ_γ sia equivalente ad un sistema lineare di 2 equazioni nelle tre incognite x_1, x_2, x_3.
3. Determinare le soluzioni del sistema lineare Σ_γ interpretato ora come sistema nelle 4 incognite x_1, x_2, x_3, x_4.

Esercizio 2. Siano $U_1 = \left\{(x, y, z, t) | \begin{cases} x + y + z - t &= 0 \\ -x + y - t &= 0 \end{cases}\right\}$ e $U_2 = \langle(0, 1, 0, 1), (0, 2, 0, -1)\rangle$ sottospazi si $\mathbb{R}^4$.

1. Si determini una base di $U_1 \cap U_2$, la si prolunghi ad una base B_{U_2} di U_2 e poi si prolunghi B_{U_2} ad una base di $\mathbb{R}^4$.
2. Si determini un sistema lineare di 3 equazioni nelle incognite x, y, z, t contenente le equazioni di U_1 e che abbia come soluzioni $U_1 \cap U_2$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da: $f(x, y, z) = (2x - y, y - 2z, x - z, x - z)$.

(a) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f e stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.

(b) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 1), (-1, 1, 0), (2, 0, 0)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(c) Stabilire se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(-1, 1, 1) = (-3, -1, -2)$, $g(-1, 1, 0) = (-3, 1, -1)$, $g(2, 0, 0) = (4, 0, 2)$, $g(-1, 3, 1) = (-5, 1, -2)$ e, in caso affermativo, se essa è unica. Nel caso g esista, definirla esplicitamente ($g(x, y, z) = \dots$).

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Le matrici A e B descrivono la stessa applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rispetto a basi diverse.
2. Le matrici B e C descrivono la stessa applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rispetto a basi diverse.

2B.

1. Dato $V = \langle (0,0,1) \rangle$ sottospazio di $\mathbb{R}^3$ esiste un unico sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $W \oplus V = \mathbb{R}^3$.
2. Siano T_1 e T_2 sottospazi di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 tali che la loro intersezione sia il sottospazio banale. Allora non esiste alcun sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ tale che $S \oplus T_1 = S \oplus T_2 = \mathbb{R}^3$.

3B. Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2.

1. I vettori $x^2, x^2 - 2, x^2 - 3$ formano una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.
2. I vettori $x^2, (x-2)^2, (x-3)^2$ formano una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

Corsi di Laurea in INGEGNERIA INDUSTRIALE
Canali 1-2-5
Corso di Fondamenti di Algebra Lineare e Geometria
Padova 21 Aprile 2012
I prova parziale
Tema n.4

PARTE A. Risolvere i seguenti esercizi:

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare Σ_k di 3 equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3 dipendente dal parametro reale k:

$$\Sigma_k : \begin{cases} kx_1 + (k-1)x_2 - 3kx_3 = k-1 \\ kx_1 + (2k-2)x_2 - kx_3 = 2k-1 \\ 2kx_1 + (k-1)x_2 - 6kx_3 = 2k-2 \end{cases}$$

1. Determinare le soluzioni del sistema lineare Σ_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
2. Determinare tutti i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ tale che il sistema lineare Σ_k sia equivalente ad un sistema lineare di 2 equazioni nelle tre incognite x_1, x_2, x_3.
3. Determinare le soluzioni del sistema lineare Σ_k interpretato ora come sistema nelle 4 incognite x_1, x_2, x_3, x_4.

Esercizio 2. Siano $V = \left\{(x,y,z,t) | \begin{cases} x+y-z+t &= 0 \\ x-y+2z-t &= 0 \end{cases}\right\}$ e $W = \langle (0,1,0,-1), (0,1,0,2) \rangle$ sottospazi di $\mathbb{R}^4$.

1. Si determini una base di $V \cap W$, la si prolunghi ad una base B_W di W e poi si prolunghi B_W ad una base di $\mathbb{R}^4$.
2. Si determini un sistema lineare di 3 equazioni nelle incognite x, y, z, t contenente le equazioni di V e che abbia come soluzioni $V \cap W$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da: $f(x,y,z) = (x-2y, z+2y, x+z, x+z)$.

(a) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f e stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.

(b) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,-1,1), (-1,1,0), (1,0,0)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(c) Stabilire se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(1,-1,1) = (3,-1,2)$, $g(-1,1,0) = (-3,2,-1)$, $g(1,0,0) = (1,0,1)$, $g(2,1,2) = (0,4,4)$ e, in caso affermativo, se essa è unica. Nel caso g esista, definirla esplicitamente ($g(x,y,z) = \dots$).

Parte B. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando brevemente la risposta (ATTENZIONE: le risposte non motivate verranno ignorate. Viene richiesto un breve ragionamento o un controesempio per supportare ogni risposta).

1B. Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nella variabile x a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2.

1. I vettori x^2, x^2+1, x^2-2 formano una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.
2. I vettori $x^2, (x+1)^2, (x-2)^2$ formano una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

2B. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Le matrici A e B descrivono la stessa applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rispetto a basi diverse.
2. Le matrici B e C descrivono la stessa applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ rispetto a basi diverse.

3B.

1. Dato $W = \langle (1,1,1) \rangle$ sottospazio di $\mathbb{R}^3$ esiste un unico sottospazio T di $\mathbb{R}^3$ tale che $W \oplus T = \mathbb{R}^3$.
2. Siano V_1 e V_2 sottospazi di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 la cui intersezione sia data dal solo vettore nullo. Allora non esiste alcun sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ tale che $S \oplus V_1 = S \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$.